

A MISKOLCI EGYETEM HABILITÁCIÓS FÜZETEI
GÉPÉSZETI TUDOMÁNYOK TUDOMÁNYÁGI HABILITÁCIÓS BIZOTTSÁG



**NANOFOLYADÉKOK HATÁRRÉTEG ÁRAMLÁSÁT KÍSÉRŐ ÉS
FELÜLET NÖVEKEDÉSI FOLYAMATOK SORÁN BEKÖVETKEZŐ
JELENSÉGEK**

Tudományos munkásság áttekintő összefoglalása

Készítette:

DR. HRICZÓ KRISZTIÁN

egyetemi docens

aki a

Gépészeti Tudományok Tudományágban
„dr. habil.” cím elnyerésére pályázik

Miskolc

2024

TARTALOMJEGYZÉK

Summary	2
1 ELŐSZÓ.....	3
2 Nanofolyadékok határréteg áramlása	6
2.1 Bevezetés.....	6
2.2 Szakirodalom kritikai elemzése.....	7
2.3 Ferrofolyadék síklap fölötti áramlásának vizsgálata	9
2.4 Nanofolyadék áramlásának vizsgálata síklapon.....	15
2.5 Összefoglalás.....	19
2.5.1 Ferrofolyadék áramlásának vizsgálata során elért új eredmények.....	19
2.5.2 Nanofolyadék áramlásának vizsgálata során elért új eredmények.....	20
2.6 A témához kapcsolódó publikációk.....	21
2.7 Felhasznált szakirodalom	22
3 felület növekedési modellek.....	25
3.1 Bevezetés.....	25
3.2 Szakirodalom kritikai elemzése.....	25
3.3 Kardar–Parisi–Zhang (KPZ) modell vizsgálata	28
3.4 Kuramoto–Sivashinsky (KS) modell vizsgálata.....	32
3.5 Összefoglalás.....	36
3.5.1 KPZ modell vizsgálata során elért új eredmények.....	36
3.5.2 KS modell vizsgálata során elért új eredmények	37
3.6 A témához kapcsolódó publikációk.....	37
3.7 Felhasznált szakirodalom	37
4 KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS.....	40

SUMMARY

The new scientific results achieved during my PhD studies between 2010-2013 were summarized in my PhD thesis "Numerical and analytical investigation of boundary layer problems of Newtonian and non-Newtonian fluids on flat surface" [1]. The public defense of my thesis was on December 10, 2014, and I received my PhD degree summa cum laude on January 30, 2015.

After obtaining the degree, I continued my scientific activities, now focusing on engineering applications. At the beginning of my PhD studies, my supervisor and I formed a research group of two, which has been continuously expanded over the years. First, Zoltán Csáti, a mechanical engineering student, joined our team in 2011, and in 2013 I travelled for the first time to the University of Picardie Jules Verne in Amiens, France, where I met Professors Mohammed Benlahsen of Physics and Guedda Mohammed of Mathematics, with whom I have been in contact and conducting joint research ever since. As a young researcher with a PhD degree, I have tried to actively contribute to the preparation and implementation of research proposals.

Since 2015, I have been involved in a number of national and international research projects as a postdoctoral researcher. The results of these projects have been published in conferences and journal articles.

My research topics are organized around two themes, one is the boundary layer flow of nanofluids along a flat sheet and in a cylindrical tube. The other is the formation of surface patterns, which play an important role in tribology.

In my habilitation booklet, I present some of the results of my work in these two areas, i.e. some of my new scientific achievements since obtaining my PhD degree.

In addition, I was invited to participate in research projects at the University of Miskolc from time to time (see details in the academic CV), and I was assigned shorter tasks as a participating researcher and project implementer.

I took up my associate professorship in September 2019, and at the same time I was asked by Dr. Zoltán Siménfalvi, Dean of the Faculty of Mechanical Engineering and Informatics, to support the Faculty as a referee. So I have been the referent of the István Sályi Doctoral School of Mechanical Engineering Sciences.

Since 2020 I am the topic writer and topic leader of the Doctoral School, currently I am leading the work of 5 PhD students in the form of independent and co-supervisor topics. Of these students, 3 will continue their studies in the dissertation phase after passing the complex examination, with the first PhD degree expected in the spring semester of 2024.

1 ELŐSZÓ

A 2010-2013 között végzett doktori tanulmányaim alatt elért új tudományos eredményeket a „Newtoni és nem-newtoni folyadékok határréteg problémáinak numerikus és analitikus vizsgálata síkfelületen” című PhD értekezésemben foglaltam össze [1]. Disszertációm nyilvános védeése 2014. december 10-én volt, PhD oklevelemet summa cum laude minősítéssel 2015. január 30-án vettem át. A fokozatszerzést követően folytattam a tudományos tevékenységet immáron már a gépészeti alkalmazásokra fókuszálva. Doktori tanulmányaim kezdetén témavezetőmmel két fős kutatócsoportot alkottunk, amely az évek során folyamatosan bővült. Elsőként Csáti Zoltán gépészmérnök hallgató csatlakozott a csapatunkhoz 2011-ben, 2013-ban utaztam első alkalommal a franciaországi Amiens-be, az University of Picardie Jules Verne egyetemre, ahol megismerkedtem Mohammed Benlahsen fizika és Guedda Mohammed matematika professzorokkal, akikkel azóta is tartjuk a kapcsolatot és közös kutatásokat folytatunk. Fokozattal rendelkező fiatal kutatóként igyekeztem aktívan közreműködni kutatási pályázatok előkészítésében és megvalósításában.

Első ilyen pályázat a TÉT_14_FR-1-2015-0004-AUTO-organization of Nanostructures in Surfaces - AUTONAS, Universite de Picardie Jules Verne - University of Miskolc volt 2015-2016 között, amely keretén belül felületen önszerveződő módon kialakuló nanostruktúrák tulajdonságait vizsgáltuk. Ez követte a TÉT_16-1-2016-0164 - Tribological modelling and experiment tests in development of advanced nanocomposite materials - University of Belgrade - University of Miskolc projekt 2017-2019 között, amelyben szintén fiatal kutatóként segítettem a kutatócsoport munkáját. Ebben a projektben ismerkedtem meg a Belgrádi Egyetem Gépészmérnöki Karának professzorával, Aleksandar Vencl-lel és a Kragujeváci Egyetem Gépészmérnöki Karának professzorával, Blaza Stojanovic-csel. A projektet sikeresen zártuk, csapatunk több közös cikket publikált az elért eredményekből. Ezt követően már ismét bővült a kutatócsoportunk, a szerb együttműködés során Szávai Szabolcs és Szabó Ferenc János kollégák is csatlakoztak hozzánk. Az együttműködés folytatását az „Útburkoló téglák gyártása újrahaznosított műanyag és pernye felhasználásával a körforgásos gazdaság és a fenntartható fejlődés elveinek megfelelően” 2023-1.2.4-TÉT-2023-00109 pályázat keretén belül tervezzük, ahol magyar részről már projektvezetőként veszek részt a megvalósításban.

Kutatásunkat a francia kollégákkal is folytattuk, második sikeres pályázatunk a 2018-2.1.13-TÉT-FR-2018-00014 - Analytical and Numerical Investigations for the Wrinkling of Graphene on Nanoparticles - Universite de Picardie Jules Verne - University of Miskolc című kétoldalú együttműködés volt, melyet 2021-ben zártunk, azonban a kutatás folytatódik. Az pályázat keretében vizsgált grafén redők gyűrődéséhez fizikai mintát Amiens-ben tudtak előállítani a Fizika Intézet laboratóriumában, melyeket rendelkezésünkre bocsátottak és elektromikroszkópos vizsgálatot végezhetünk a mintákon a Miskolci Egyetemen. Időközben megismerkedtünk Jonathan C. Borg professzor úrral a Máltai Egyetemről, akivel Erasmus együttműködést alakítottunk ki és két alkalommal a program keretében meg is látogattuk őt Máltán. Jonathan C. Borg professzor termékfejlesztéssel foglalkozik, ahol szintén fontos kérdés a felületi mintázatok, bevonatok vizsgálata. A Máltai Egyetemen is foglalkoznak grafén rétegek előállításával és a kialakuló redők/mintázatok szabályozhatóságával, itt volt meg a közös pont az együttműködés elkezdéséhez.

Mindemellett a Miskolci Egyetemen folyó kutatási projektekbe is kaptam meghívást időről időre (lásd részletezve a tudományos önéletrajzban), hosszabb rövidebb feladatokkal bíztak meg résztvevő kutatóként és projekt megvalósítóként. 2019 szeptemberében vettem át a docensi kinevezésem és ezzel egy időben kért fel Dr. Siménfalvi Zoltán dékán úr, hogy támogassam a Gépészmérnöki és Informatikai Kar működését referensként. Ekkor lettem a Sályi István Gépészeti Tudományok Doktori Iskola referense, amely a gépészeti tudományok tudományág művelésében erősített meg. 2020-tól vagyok a Doktori Iskola témakiírója és témavezetője, jelenleg 5 fő doktornadusz munkáját vezetem önálló és társtémavezetés formájában. Az említett hallgatók közül 3 fő sikeres komplex vizsgát követően a disszertációs szakaszban folytatja tanulmányait, az első fokozatszerzés 2024 tavaszi félévében várható.

A fokozatszerzésem óta eltelt években az alábbi gépészeti területeken végeztem tudományos kutatási feladatokat:

- alap- és nanofolyadékok áramlása: [P2.1-P2.11]
 - vizsgált geometriák:
 - síkfelület (vízszintes és függőleges irányban), [P2.1-P2.3]
 - egyenes cső, [P2.10]
 - hullámos cső, [P2.11]
 - alkalmazott peremfeltételek:
 - áteresztő felület, [P2.5]
 - mozgó felület, [P2.4]
 - nyúló felület, [P2.5]
 - konstans falhőmérséklet, [P2.6]
 - változó falhőmérséklet, [P2.7]
 - mono és hibrid nanofolyadékok:
 - fémes nanorészecskék: [P2.2]
 - mágnesezhető (MHD (Magnetohydrodynamics) áramlás), [P2.9]
 - nem mágnesezhető, [P2.10]
 - nem fémes nanorészecskék, [P2.11]
 - vizsgálati módszerek:
 - analitikus, [P2.8]
 - numerikus (Matlab és Maple kódok), [P2.9]
 - CFD (Computational Fluid Dynamics). [P2.10], [P2.11]
- felületnövekedési modellek: [P3.1 - P3.5]
 - Kardar–Parisi–Zhang (KPZ) egyenlet, [P3.2], [P3.5]

- Kuramoto–Sivashinsky (KS) egyenlet, [P3.1]
- „Conserved” Kuramoto–Sivashinsky (CKS) egyenlet, [P3.3]
- vizsgálati módszerek:
 - analitikus, [P3.2]
 - numerikus (saját kód, Matlab illetve Maple kódok). [P3.1]

A felsorolt kutatási témákból jelen téziszfüzetben két olyan területet emelek ki, amelyek nem kapcsolódnak közvetlenül a tudományos vezetésem alatt álló doktoranduszok kutatásához. Az egyik terület a doktori értekezésemben végzett kutatások folytatásaként a *nanofolyadékok határréteg áramlásának* témakörét foglalja össze, a másik terület pedig döntően a nemzetközi együttműködések keretében vizsgált *felületnövekedési modellek* vizsgálatához kapcsolódik.

2 NANOFOLYADÉKOK HATÁRRÉTEG ÁRAMLÁSA

2.1 Bevezetés

Az áramlástan köztudottan egy olyan tudományterület, ahol a térben és időben lejátszódó folytonos természeti jelenségeket parciális differenciálegyenletekkel (PDE) tudjuk adekvát módon leírni. Ennek a diszciplínának egyik igen fontos ága a határrétegekben lejátszódó fizikai folyamatokkal foglalkozik.

Ludwig Prandtl volt ezen tudományterület úttörője, aki a huszadik század elején skálázási módszerrel bebizonyította, hogy a kétdimenziós Navier-Stokes egyenletek tagjainak hozzávetőleg fele elhagyható a határrétegekben lejátszódó áramlási jelenségek vizsgálata esetén [2]. Blasius 1908-as dolgozatában [3] megadta az összenyomhatatlan stationer kétdimenziós határrétegekben való áramlás profilját. A határrétegekben lejátszódó fizikai folyamatokat Schlichting mára már klasszikussá vált tankönyvéből bárki részletekbe menően elsajátíthatja [4].

A határréteg áramlás területe azóta is népszerű a kutatók körében, különböző viszkozus folyadékok esetén végeznek vizsgálatokat. Kezdetben, homogén folyadékokat vizsgáltak, mint a víz, vagy különböző olajok, illetve megfigyelhető a jelenség folyékony műanyagok és olvasztott üveg esetén is. Néhány esetben az ömlesztett szemcsés anyagok mozgása, mint pl. a homok különböző frakciói (nano mérettől a 4-5 mm frakciójú „vakoló” homokig), vagy éppen az ömlesztett formában tárolt termények (pl. búza, rozs) mozgása is modellezhető hatványtörvény szerinti folyadék modellel, ahol szintén megfigyelhető a határréteg kialakulása az áramlás során.

A 20. század második felében a klasszikus értelemben vett folyadékok már nem tudták kielégíteni az ipari alkalmazásokban keletkezett elvárásokat, így a folyadékok specializálásával folytatódott ezen tudományterület fejlődése. Adalék anyagok hozzáadásával kívántak stabil szuszpenziókat létrehozni, amely elegyek folyadékként viselkednek továbbra is, azonban a viszkozitásuk, ezáltal a mozgásuk, vagy a hőtároló és hőátadó képességük kedvezőbb, mint az alap folyadéké.

A szuszpenziókat, amelyek valamilyen fémes vagy nem fémes, 100 nm-nél kisebb méretű nanorészecskék alapfolyadékban (pl. víz, etilén glikol, természetes vagy mesterséges olajok) történő elnyeltetésével keletkeznek, azokat nanofolyadéknak nevezzük. Gyakran használt nem fémes nanorészecske a szilícium-oxid, vagy a karbon nanocső, melyből méret és alak alapján megkülönböztetnek több típust. Fémes részecskék közül a fénoxidok használata az elterjed, ahol a két főcsoportot a nem mágnesezhető részecskék és a mágnesezhető részecskék alkotják. Tipikusan előforduló nem mágnesezhető fémes részecskék az alumínium-, réz-, titán- és cink-oxid. Mágnesezhető részecskék a különböző vas-oxidok.

Nanofolyadékok előállítása során az alapfolyadékhoz 0 - 4 térfogat % mennyiségben adnak hozzá nanorészecskét. Elméletben lehetne magasabb térfogat százalékos elegyeket is létrehozni, azonban a gyakorlati alkalmazások (kísérleti mérések) azt mutatják, hogy már jelentősen nem javul a folyadék fizikai tulajdonsága, illetve kezdi elveszíteni a folyadék tulajdonságot a nagyobb koncentrációjú keverék és már szinte szilárd testként funkcionál. Itt

szükséges megjegyezni azt is, hogy ha egy alapfolyadékhoz egy féle nanoszemcsét adagolunk, akkor mono-nanofolyadékot hozunk létre, két vagy több féle nanorészecske egyidejű hozzáadásával hibrid-nanofolyadék keletkezik. Kutatásaink során mindkét esettel foglalkozunk, azonban homogén közeget feltételezve, egyfázisú áramlásokkal dolgozunk modelljeinkben.

Kiemelt figyelmet fordítunk a mágnesezhető részecskéket tartalmazó nanofolyadékokra, melyeket más néven ferrofolyadéknak (ferrofluid-nak) nevezünk. A ferrofolyadékokat az a tulajdonságuk teszi különlegessé, hogy egyszerre képesek folyadékként és mágneses anyagként is viselkedni, amelyet az ipar számos területén hasznosítanak, úgy, mint járművek vagy elektronikai eszközök hűtése, atomreaktorok üzemeltetés, hőcserélők alkalmazása. A mágnesezhető nanofolyadékok nagyon hasznosak a rákos megbetegedések kezelésénél, sebkezelésnél vagy az MRI felvételek készítésénél, stb [5].

2.2 Szakirodalom kritikai elemzése

A fenti folyamatok jelenkori, aktuális tudományos és mérnöki alkalmazásait Hori [6] könyvéből ismerhetjük meg. A monográfiájában saját kutatásai alapján a hidrodinamikai kenés számos fontos alkalmazási területét mutatja be részletesen. Ilyenek például az olajkorbács (forgó tengelyek stabilitása), a mágnesszalagos tárolókkal kapcsolatos fóliacsapágyak, a merev felületek és viszkoelasztikus felületek közötti szorítófilm, a csapágyak hőmérséklet-emelkedésének elméleti és kísérleti elemzése, a turbulens kenőfilmek vizsgálata a k -epsilon modell segítségével.

Az elmúlt évtizedek során számos kutató foglalkozott a határrejtegeket leíró PDE-k (PDE rendszerek) megoldásával különböző kezdeti és peremfeltételek mellett. A továbbiakban a teljesség igénye nélkül kutatásaim szempontjából releváns dolgozatokat említem meg. Libby és Fox [7] perturbációs módszerek alkalmazásával állította elő megoldásait, míg Ma és Hui [8] önhasonló megoldásokat mutatott be a határrejtegekre vonatkozóan.

A kilencvenes években Burde [9 - 11] publikált különböző analitikus megoldásokat a témában. Weidman [12] további megoldásokat közöl cikkében határrejtegekre keresztirányú áramlásban. Ludlow és munkatársai [13] szintén a hasonlósági módszer alkalmazásával származtatták megoldásaikat.

Stacionárius nem-newtoni határrejtegeket Bognár [14] vizsgált és adott meg hasonlósági megoldásokat. A későbbiek során pedig általánosította a megoldásait a stacioner hővezetési mechanizmust is figyelembe véve [15 - 17]. A Sedov által bevezetett önhasonló Ansatz-ot (próbafüggvényt) [18] alkalmazzák számos esetben a kezdeti nemlineáris csatolt PDE rendszer egy nemlineáris csatolt közönséges differenciálegyenlet (KDE) rendszerre történő transzformálásához. A módszer alkalmazását az teszi indokolttá, hogy a nemlineáris jelenségeket leíró PDE-k megoldásának nincs általános, egzaktul kidolgozott matematikai elmélete, azaz nem létezik általános megoldási módszer. Az ilyen módon származtatott KDE rendszert általában kvadratúrával lehet megoldani, ezáltal analitikus eredményeket meghatározni a sebességre, a hőmérsékletre, illetve a nyomásra, mint eredeti dinamikus változókra.

Másik megoldási lehetőség a numerikus megközelítés, ahol különböző algoritmusok alkalmazásával állítanak elő közelítő megoldásokat, olyan esetben, amikor nem lehetséges az analitikus megoldás. Illetve a számítógépes áramlástani (Computational fluid dynamics (CFD)) szimulációk és laboratóriumi mérések a határréteg változások elemzésére.

Yang és munkatársai [19] kísérleteket végeztek vízalapú grafit szemcsés nanofolyadék lamináris áramlásával kapcsolatban, és megfigyelték a konvektív hőátadás javulását. A különböző nanofolyadékok közül az Al_2O_3 -alapú, vízbázisú nanofolyadékok különösen fontos szerepet játszanak a napkollektorokban történő alkalmazásban [20]. Mahian és munkatársai [21] megállapították, hogy a vizsgált nanorészecskék közül az Al_2O_3 mutatja a legmagasabb hőátadási együtthatót megelőzve a Cu, SiO_2 és TiO_2 -ot.

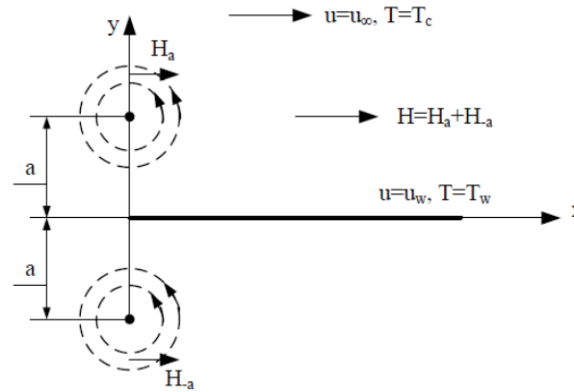
Kanti és munkatársai [22 - 24] pernye-víz illetve pernye:Cu - víz mono és hibrid nanofolyadékok turbulens áramlását vizsgálták numerikus és kísérleti úton, ahol a 2 térfogat % koncentrációjú elegy mutatta a fizikai paraméterek legnagyobb hatékonyságnövekedését.

Számos kutatásban foglalkoznak a magneto-hidrodinamikus (MHD) áramlások vizsgálatával, amikor egy H külső mágneses tér hatása alá helyezik a mágnesezhető szuszpenziókat. Ekkor az anyagban levő dipólusok és vonaláramok indukálnak egy M mágnesezettséget. Az ilyen közegben kialakuló MHD áramlási feladatokat számos esetben vizsgálták végtelennek tekintett síkfelület mentén ([25] – [31]).

PhD fokozatszerzésem (2015) óta eltelt időszakban a fent említett cikkekre és könyvekre alapozva folytattam kutatásaimat. Elsőként ferrofolyadék mágneses térben történő lamináris áramlása témakörében értem el nemzetközileg elismert eredményeket, melyet a független hivatkozások igazolnak. Az alábbiakban röviden ismertetem ezt és további nanofolyadék határréteg áramlásában elért, nemzetközi folyóiratokban publikált eredményeim.

2.3 Ferrofolyadék síklap fölötti áramlásának vizsgálata

Egy összenyomhatatlan, viszkozus és elektromosan nem vezető, ferromágneses folyadék kétdimenziós állandósult áramlását tekintjük vízszintes síklap mentén az 1. ábrán látható elhelyezéssel.



1. ábra Mágneses mezőbe helyezett síklappal párhuzamos áramlás

A feltételezésünk szerint az alkalmazott mágneses dipólusok egyenlő távolságra helyezkednek el a vezető éltől. A két elektromos vezető szál az áramlási irányra merőlegesen helyezkedik el, és az általuk keltett mágneses mező az áramlás síkjából kifelé irányított.

A ferro-hidrodinamikai kölcsönhatásokban nélkülözhetetlen a térben változó mezők létezése [32], az alábbiakban a következő feltevéseket tesszük:

- (i) a folyadékelem mágnesesítésének iránya mindig a helyi mágneses tér irányába mutat,
- (ii) a folyadék elektromosan nem vezető és
- (iii) az elmozdulási áram elhanyagolható.

Az alkalmazott mágneses teret a $\mathbf{H} = -\nabla\phi$ egyenlettel, azaz a mágneses skalár potenciál negatív gradienseként vezetjük be, ahol a ϕ függvény az alábbi formulával fejezhető ki:

$$\phi(x, y) = -\frac{I_0}{2\pi} \left(\tan^{-1} \frac{y+a}{x} + \tan^{-1} \frac{y-a}{x} \right),$$

ahol I_0 az egy hosszegységre jutó dipólus momentum és a az elektromos vezető szálak vezető éltől mért távolsága.

A határrétegben, közel a falhoz, azonban jelentősen távol a vezetőszáltól (tehát ha $x \gg a$) a számításokat követően az alábbi formába írható a mágneses mező x szerinti deriváltja

$$[\nabla H]_x = -\frac{I_0}{\pi} \frac{1}{x^2}, \quad (1)$$

amelyet modellünkben alkalmazunk.

Egy kétdimenziós, összenyomhatatlan áramlás határréteg egyenletei a folytonossági, mozgási és energia egyenleteken alapulnak.

Vizsgálataink az alábbi négy alapfeltevés esetén érvényesek:

(i) az alkalmazott mező elég erős ahhoz, hogy a határretegben mindenütt telítetté tegye a ferrofolyadékot,

(ii) a folyadékra ható szélsőséges hőmérsékleteken belül a hőmérséklettől függő M mágnesezettség változását az $M = K(T_C - T)$ lineáris egyenlettel közelíthetjük, ahol K a piromágneses együttható és T_C a Curie-hőmérséklet [33]

(iii) az indukált mágnesezésből adódó indukált mezőt elhanyagoljuk, így a hidrodinamikai és elektromágneses egyenletek szétválaszthatók,

(iv) a modellben az alkalmazott hőmérsékleti tartományban a c termikus hőkapacitás, a k hővezető képesség és a ν viszkozitási együttható független a hőmérséklettől.

A vizsgált áramlás az alábbi egyenletekkel írható le:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{I_0 \mu_0 k}{\pi \rho} (T_C - T) \frac{1}{x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3)$$

$$c \left[u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4)$$

ahol az x és y a síkkal párhuzamos és arra merőleges koordinátatengelyek, u és v az x és y irányú sebesség komponensek, μ_0 a kinematikus viszkozitás, továbbá ρ jelöli a környező folyadék sűrűségét, amit állandónak tekintünk.

A (2)-(4) egyenletrendszerhez a felvett modell szerint az alábbi peremfeltételek járulnak:

- a síklap mentén ($y = 0$):

$$u(x, 0) = 0, v(x, 0) = 0, T(x, 0) = T_w \quad (5)$$

ahol $T_w = T_C - Ax^{m+1}$ (A és m konstans), és

- távol a síklaptól ($y \rightarrow \infty$):

$$u(x, y) \rightarrow u_\infty, T(x, y) \rightarrow T_\infty \quad (6)$$

ha y távol van a határrelegtől ($y \rightarrow \infty$), itt a $T_\infty = T_C$ és $u_\infty = U_\infty x^m$, $U_\infty =$ konstans a külső áramlási sebesség, melyet állandónak feltételezünk vizsgálatunk során.

Az m paraméter a hatványkitevőben szerepel. Az $m = 0$ paraméter érték utal a lineáris hőmérséklet profilra és a konstans áramlási sebességre. Abban az esetben, ha $m = 1$ a hőmérséklet négyzetes és a sebesség lineáris változású. Az $m = -1$ érték kifejezi, hogy nincs hőmérsékletváltozás a felületen.

Bevezetjük a ψ áramfüggvényt az $u = \partial \psi / \partial y$ és $v = -\partial \psi / \partial x$ formulával, amellyel a (2) folytonossági egyenlet automatikusan teljesül. A (3)-(4) egyenletekbe behelyettesítve az áramfüggvényt az alábbiak adódnak:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} - \frac{I_0 \mu_0 K}{\pi \rho} (T_C - T), \quad (7)$$

$$c \left[\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \right] = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (8)$$

A peremfeltételek a következő formában adhatóak meg az áramfüggvényre vonatkozóan:

$$\psi'_y(x, 0) = 0, \psi'_x(x, 0) = 0, T(x, 0) = T_C - Ax^{m+1}, \quad (9)$$

$$\psi'_y(x, y) \rightarrow U_\infty x^m, T(x, y) = T_C \text{ as } y \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Így két egyváltozós függvényre két parciális differenciálegyenletet kaptunk. A (7)-(10) peremérték feladat lehetővé teszi, hogy a ψ és T megoldásainak egy speciális változatát, az ún. hasonlósági megoldásait határozzuk meg az alábbi formában [27]:

$$\left. \begin{aligned} \psi(x, y) &= C_1 x^b f(\eta), \\ T &= T_C + Ax^{m+1} \theta(\eta), \\ \eta &= C_2 x^d y \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ahol b és d kielégíti a $b + d = m$ skálázási feltételt, továbbá a C_1 és C_2 együtthatókra igaz a $C_1 / C_2 = \nu$ összefüggést. Valós számok esetén $b - d = 1$ és $C_1 C_2 = U_\infty$, így

$$b = \frac{m+1}{2}, \quad d = \frac{m-1}{2}, \quad C_1 = \sqrt{\nu U_\infty}, \quad C_2 = \sqrt{\frac{U_\infty}{\nu}}.$$

Alkalmazva a (11) hasonlósági transzformációt a (7)-(10) peremérték feladatra az eredeti parciális differenciálegyenlet-rendszerünket visszavezetjük a következő, csatolt, nemlineáris közönséges differenciálegyenlet-rendszer peremérték feladatára:

$$f''' - mf'^2 + \frac{m+1}{2} ff' - \beta \theta = 0 \quad (12)$$

$$\theta'' + (m+1)Pr \left(\frac{1}{2} f \theta' - \theta f' \right) = 0 \quad (13)$$

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, \theta(0) = 1 \quad (14)$$

$$f'(\eta) = 1, \theta(\eta) = 0 \text{ as } \eta \rightarrow \infty \quad (15)$$

ahol $Pr = cv / k$ a Prandtl szám és $\beta = I_0 \mu_0 KA / \pi \rho U_\infty^2$ a ferromágneses paraméter.

A megoldásokból kifejezhetőek a $\vec{v} = (u, v, 0)$ dimenziómentes sebességkomponensei:

$$u = U_\infty x^m f'(\eta),$$

$$v = -\sqrt{\nu U_\infty} x^{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{m+1}{2} f(\eta) + \frac{m-1}{2} f'(\eta) \eta \right).$$

Továbbá az $f''(0)$ ellenállás-tényezővel és $\theta'(0)$ hőátadási együtthatóval kifejezhető a felület menti nyírási feszültség és hőátvitel.

Ismereteink szerint az $m = 0$ esethez tartozó kapcsolt határréteg egyenleteket elsőként Neuringer vizsgálta [33].

Megjegyezzük, hogy ha $m = 0$ és $\beta = 0$, akkor a (12) egyenlet megegyezik a jól ismert Blasius egyenlettel

$$f''' + \frac{1}{2} ff' = 0, \quad (16)$$

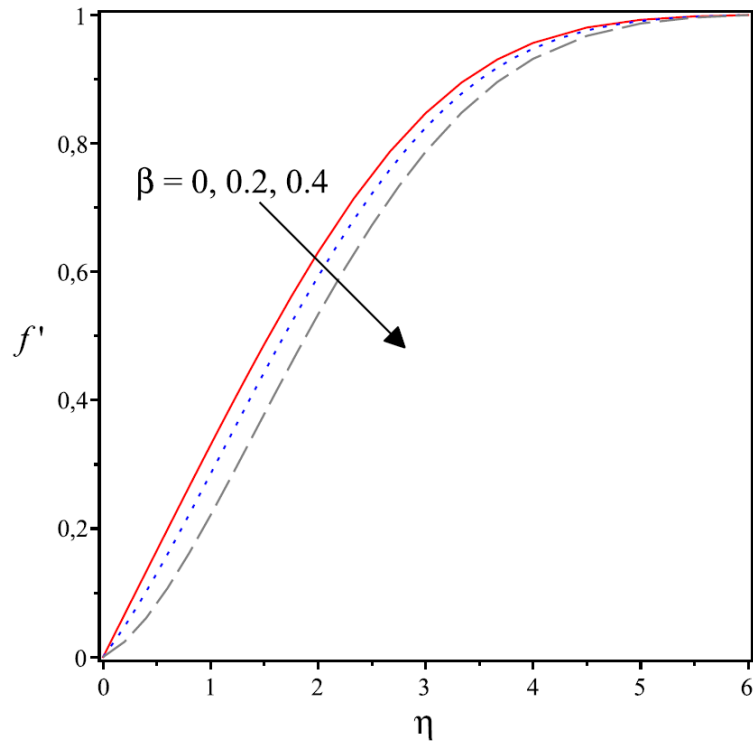
amely a newtoni folyadékok lamináris határréteg feladatainak vizsgálatánál fordul elő [31].

A mágneses térbe helyezett mágnesezhető nanofolyadék hőátadási dinamikáját numerikusan vizsgáljuk matematikai megközelítésben, ahol a folyadék elektromosan nem vezető és a megoldásokkereséséhez feltételeztük az $x \gg a$ geometriai feltétel érvényességét.

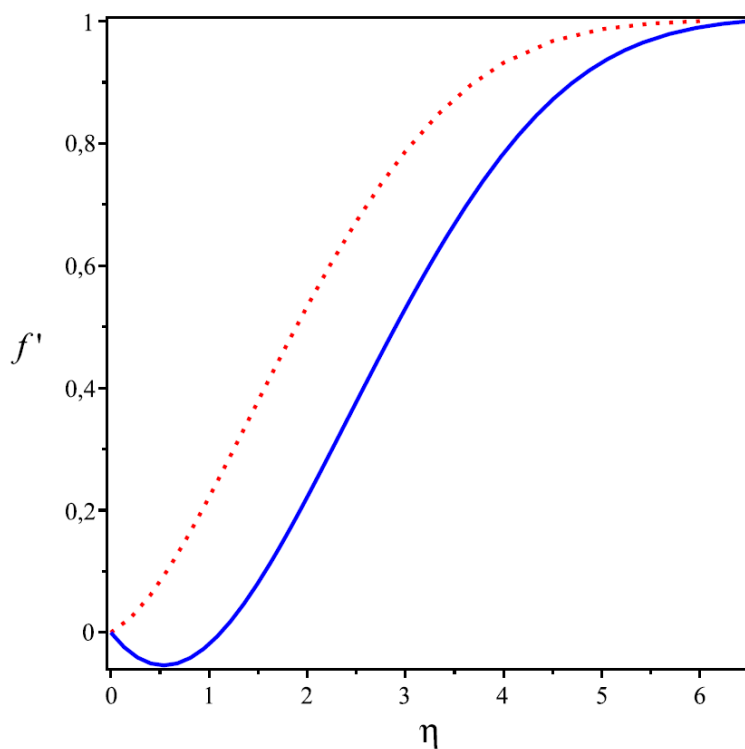
Számos numerikus módszer ismert olyan erősen nemlineáris peremérték feladatok megoldására, mint a (12)-(15) feladat. Egyik ilyen eljárás az ún. HDM (higher derivative method, azaz „magasabb rendű deriváltak módszere”), melynek elve az A-stabil Implicit Runge-Kutta módszerek stabilitási függvényéből származik. A metódust Chen és szerzőtársai implementálták Maple-ben, majd ezt nyílt forráskódúként közzétették [34]. A (12)-(15)

peremérték feladat numerikus megoldásainak meghatározására ennek módosítását alkalmaztam.

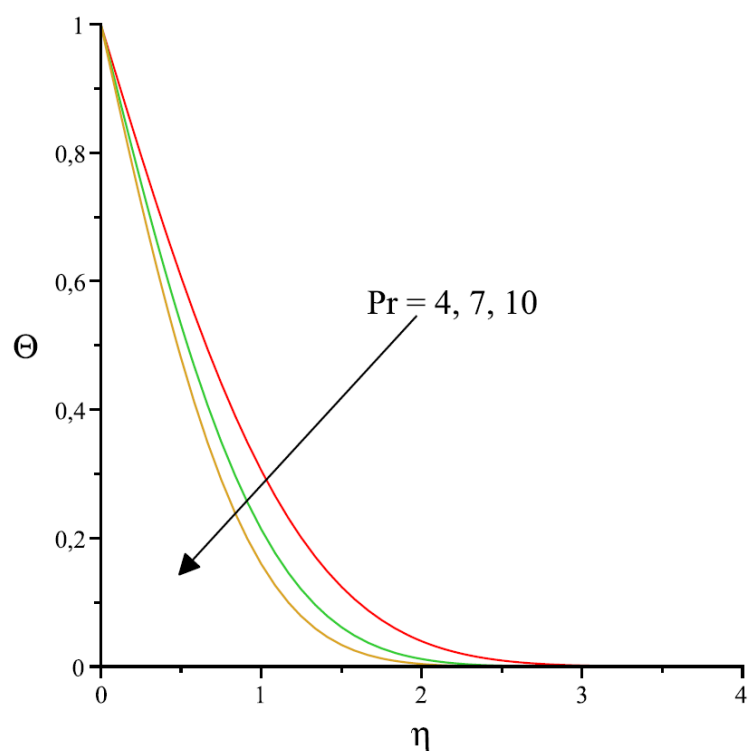
A (12)-(13) csatolt, harmadrendű közönséges differenciálegyenlet-rendszert elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerré átírva adtam meg a programkódban, majd beállítva a peremfeltételeket és paraméter értékeket futtattam a programot és elemeztük a kapott numerikus megoldásokat.



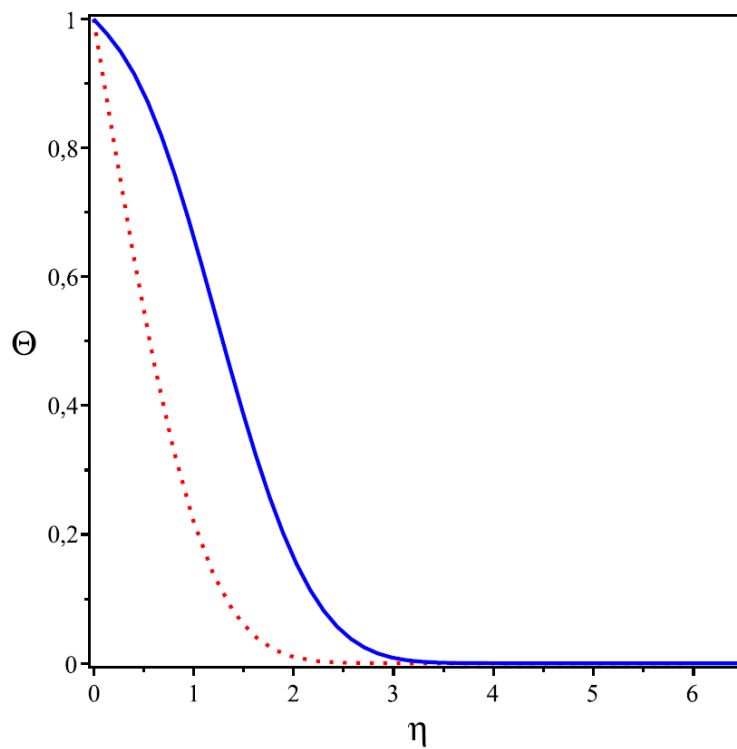
1. ábra A határréteg sebeségeloszlásának változása β hatására



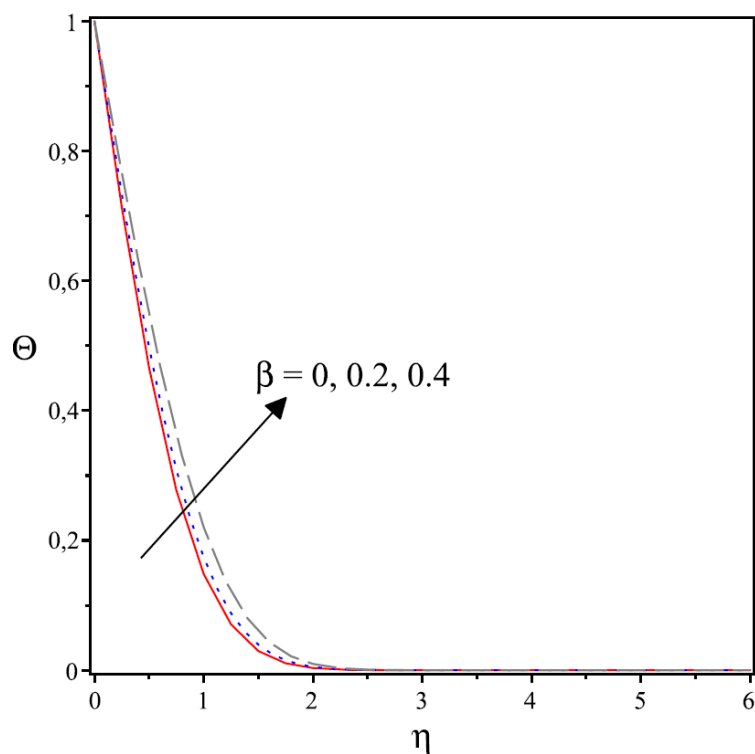
2. ábra Duális megoldás a határréteg sebeségeloszlására



3. ábra A határréteg hőmérsékleteloszlásának változása Pr hatására



4. ábra Duális megoldás a határréteg hőmérsékleteloszlására



5. ábra A határréteg hőmérsékleteloszlásának változása β hatására

2.4 Nanofolyadék áramlásának vizsgálata síklapon

Tekintsük egy vízalapú mono nanofolyadék kétdimenziós határréteg áramlását egy folyamatosan mozgó síkfelületen, három különböző típusú nanorészecske alkalmazása esetén. A részecskék termofizikai tulajdonságait az 1. táblázat tartalmazza [35]. Feltételezzük, hogy a nanofolyadék összennyomhatatlan, az áramlás lamináris, illetve a viszkózus disszipáció és a sugárzás hatásai elhanyagolhatók.

1. táblázat A Fe_3O_4 , TiO_2 , Al_2O_3 részecskék és a víz termofizikai tulajdonságai

Paraméter	Fe_3O_4	TiO_2	Al_2O_3	H ₂ O
$\rho[\text{kg}/\text{m}^3]$	5180	4250	3970	997.1
$C_p[\text{J}/\text{kg}\cdot\text{K}]$	670	686.2	765	4179
$k[\text{W}/\text{m}\cdot\text{K}]$	9.7	8.9538	40	0.613
$\mu[\text{Pa}\cdot\text{s}]$	-	-	-	0.001

A derékszögű koordináta-rendszerben a x -tengely az áramlás irányba növekszik, míg a y -tengely merőleges az áramlási felületre. A határréteg a T_w hőmérsékletű, mozgó síklap felületén alakul ki, a határréteg feletti állandósult áramlásban a folyadék T_∞ hőmérsékletű.

Esetünkben $T_w < T_\infty$. Az u és v sebességkomponensek az x és y tengelyek irányába mutatnak, μ_{nf} a nanofolyadék dinamikus viszkozitást jelöli, ρ_{nf} a sűrűségét, α_{nf} a hődiffúziós képességét.

A hagyományos határréteg-elméletben számos feltételezés született: az mozgás és a termikus határréteg nagyon vékony az áramlás hosszskálájához képest, és a felület mozgásának irányában növekszik, a fallal párhuzamos u komponens sokkal nagyobb, mint a falra merőleges v komponens, a sebességkomponensek deriváltjai a fal mentén nagyok [36]. A mozgó síklap hőátadása nincs hatással a termikus határrétegen kívüli eső folyadékáramra. Ezen feltételezések mellett az áramlást leíró egyenletrendszer a folytonossági, mozgás és energia egyenletről áll, melyek a következők:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (16)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (17)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_{nf} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (18)$$

Az U jelöl egy állandó sebesség nagyságot. A szilárd felület tapadás és csúszásmentes, továbbá egyik esetben $u(x, 0) = 0$ és $\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = U$, míg másik esetben az $u(x, 0) = U$ és $\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0$.

Azaz Blasius-féle áramlás esetén a peremfeltételek:

$$\begin{aligned} u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad T(x, 0) = T_w, \\ \lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = U, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} T(x, y) = T_\infty \end{aligned} \quad (19)$$

Míg Sakiadis-féle áramlásnál a peremfeltételek:

$$u(x, 0) = U, \quad v(x, 0) = 0, \quad T(x, 0) = T_w,$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} T(x, y) = T_{\infty} \quad (20)$$

A (19) és (20) peremfeltételekben különbözik a kétféle áramlás, minden egyéb komponensben megegyezik.

A nanorészecskék térfogat aránya nagyban befolyásolja a nanofolyadék termofizikai tulajdonságait, ezért az alábbi összefüggéseket alkalmazzuk ennek figyelembevételére.

A nanofolyadék sűrűségét a

$$\rho_{nf} = (1 - \phi)\rho_b + \phi\rho_p, \quad (21)$$

itt ρ_b és ρ_p jelöli az alapfolyadék és alkalmazott nanorészecske sűrűségét, ϕ pedig a nanorészecske térfogatarányát.

A nanofolyadék viszkozitása az alábbi formulával számítható

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_b}{(1-\phi)^{2.5}}, \quad (22)$$

ahol μ_b az alapfolyadék viszkozitása.

A nanofolyadék hőkapacitása is arányos a részecske térfogatarányával, melyre az alábbi összefüggést alkalmazzuk:

$$(\rho C_p)_{nf} = \phi(\rho C_p)_p + (1 - \phi)(\rho C_p)_b; \quad (23)$$

itt $(\rho C_p)_p$ a részecske és a $(\rho C_p)_b$ az alapfolyadék hőkapacitása.

A nanofolyadék hővezető képessége is koncentráció függő:

$$k_{nf} = k_b \frac{k_p + 2k_b - 2\phi(k_b - k_p)}{k_p + 2k_b + \phi(k_b - k_p)}, \quad (24)$$

ahol k_b az alapfolyadék hővezető képessége, k_p pedig a részecskék hővezető képessége.

Bevezetve a ψ áramfüggvényt a $u = \partial\psi / \partial y$, $v = -\partial\psi / \partial x$ jól ismert formában, a (16) folytonossági egyenlet automatikusan teljesül.

A hasonlósági transzformációhoz szükséges definiálni a hasonlósági változót az alábbi formában:

$$\eta = \left(\frac{U}{v_{nf} x} \right)^{1/2} y, \quad (25)$$

mellyel az alábbi módon fejezhető ki az áramfüggvény és a dimenziómentes hőmérséklet:

$$\psi = (U v_{nf} x)^{1/2} f(\eta), \quad \theta(\eta) = \frac{T - T_{\infty}}{T_w - T_{\infty}}, \quad (26)$$

ahol $v_{nf} = \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}}$ a nanofolyadék kinematikus viszkozitását jelöli.

Behelyettesítve a (25) hasonlósági változót és (26) függvényeket a (17) mozgás, illetve (18) energia egyenletbe, az eredeti PDE rendszert visszavezetjük KDE rendszerre. A f és θ következőképpen

$$\frac{\rho_b}{\rho_{nf}} \frac{\mu_{nf}}{\mu_b} f'''' + \frac{1}{2} f f''' = 0, \quad (27)$$

$$\alpha_{nf} \frac{\rho_b}{\mu_b} \theta'' + \frac{1}{2} f \theta' = 0, \quad (28)$$

az egyenletekben a deriváltak η szerinti deriválást jelentenek.

A peremfeltételeken is elvégezve a hasonlósági transzformációt az alábbi dimenziómentes feltételek adódnak.

Blasius-féle feladat esetén:

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 1, \quad (29)$$

$$\theta(0) = 1, \lim_{\eta \rightarrow \infty} \theta(\eta) = 0. \quad (30)$$

Sakiadis-féle feladat esetén:

$$f(0) = 0, f'(0) = 1, \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(\eta) = 0, \quad (31)$$

$$\theta(0) = 1, \lim_{\eta \rightarrow \infty} \theta(\eta) = 0. \quad (32)$$

Fontos megjegyezni, hogy a dimenziós sebesség komponensek az f hasonlósági függvénnyel adhatók meg:

$$u(x, y) = U f'(\eta), \quad (33)$$

$$v(x, y) = v^*(x) [\eta f'(\eta) - f(\eta)], \quad (34)$$

ahol $v^*(x) = \frac{1}{2} U Re_x^{-\frac{1}{2}}$, valamint az Re_x lokális Reynolds-szám meghatározása: $Re_x = U x / \nu_{nf}$.

A dimenziós hőmérsékletet a következőképpen kapjuk meg:

$$T(x, y) = T_\infty + (T_w - T_\infty) \theta(\eta). \quad (35)$$

A (27)-(28) KDE rendszert a MATLAB bvp4c algoritmusával oldottam meg, az így előállított hasonlósági megoldásokat összevettem kutatótársam CFD eredményeivel. Az összehasonlításból származó eredményeket a 2.5 Összefoglalás alfejezetben ismertetem.

Mérnöki szempontból a C_f jelölt felületi súrlódási együttható és az Nu_x lokális Nusselt-szám érdekes, ezeket részletesen elemzem a megoldásokból. Először is megadjuk a fal nyírófeszültségét (τ_w) és a hőáramát (q_w):

$$\tau_w = \mu_{nf} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad q_w = -k_{nf} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (36)$$

A súrlódási együttható (C_f) és a lokális Nusselt-szám (Nu_x) a következő:

$$C_f = \frac{\tau_w}{\rho_b U^2}, \quad Nu_x = \frac{x q_w}{k_{nf} (T_w - T_{nf})}. \quad (37)$$

Behelyettesítve (37)-be a (25) és (26) képletekkel definiált hasonlósági változót és hasonlósági függvényeket a következő dimenziómentes formában fejezhetőek ki:

$$Re_x^{1/2} C_f = \frac{1}{(1-\phi)^{2.5}} f''(0), \quad Re_x^{-1/2} Nu_x = -\frac{k_{nf}}{k_b} \theta'(0), \quad (38)$$

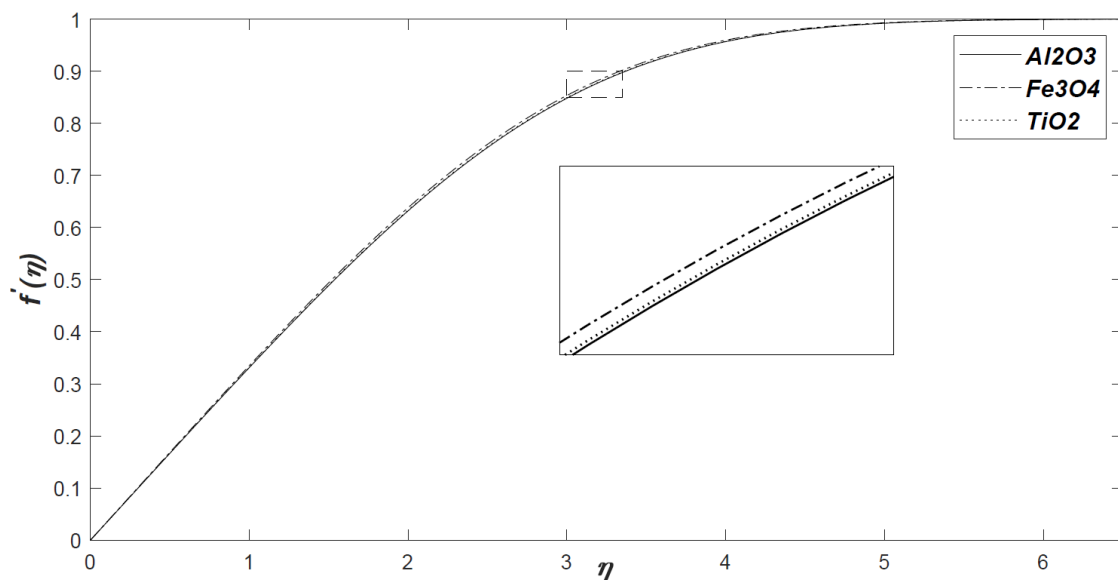
ahol $Re_x = \frac{\rho_{nf} U x}{\mu_{nf}}$ a helyi Reynolds-szám.

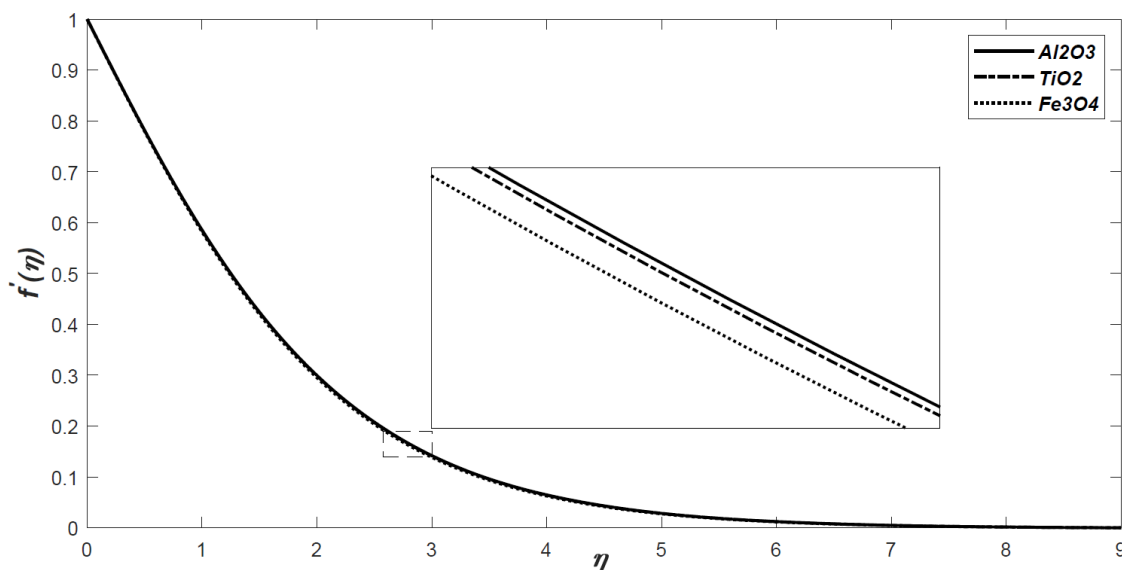
2. táblázat. $Re_x^{1/2} C_f$ változása ϕ koncentrációval (Blasius feladat)

ϕ	Al2O3		TiO2		Fe3O4	
	hasonlóság	CFD	hasonlóság	CFD	hasonlóság	CFD
0,0	0,33205	0,30949	0,33205	0,30949	0,33205	0,30949
0,01	0,34123	0,32017	0,34169	0,32090	0,34323	0,32501
0,02	0,35055	0,32937	0,35148	0,33196	0,35454	0,34025
0,03	0,36004	0,33895	0,36061	0,34271	0,36600	0,35532
0,04	0,36969	0,34839	0,37154	0,35341	0,37762	0,37028

3. táblázat. $Re_x^{-1/2} Nu$ változása a ϕ koncentrációval (Sakiadis feladat)

ϕ	Al2O3		TiO2		Fe3O4	
	hasonlóság	CFD	hasonlóság	CFD	hasonlóság	CFD
0	1,36704	1,58199	1,36704	1,58199	1,36704	1,58199
0,01	1,38267	1,60408	1,37974	1,60056	1,38043	1,60221
0,02	1,39833	1,62624	1,39426	1,61913	1,39387	1,62240
0,03	1,41401	1,64942	1,40520	1,63766	1,40737	1,64264
0,04	1,42975	1,67068	1,41798	1,65624	1,42093	1,66293

**6. ábra** A sebességeloszlás változása különböző nanorészecskék esetén (Blasius feladat)



7. ábra A sebességeloszlás változása különböző nanorészecskék esetén (Sakiadis feladat)

2.5 Összefoglalás

Fokozatszerzésemet követően kezdtem el a nanofolyadékok határréteg feladatainak vizsgálatával foglalkozni, mely terület a széleskörű műszaki alkalmazhatósága miatt keltette fel érdeklődésem. A tématerületen elért új eredményeket az alábbi alfejezetekben összegzem.

2.5.1 Ferrofolyadék áramlásának vizsgálata során elért új eredmények

A (2)-(4) PDE rendszerrel modellezett ferrofolyadék hideg síklap fölötti állandósult áramlása során kialakuló határréteg jelenséget vizsgáltam térben változó mágneses tér jelenlétében. A vizsgálat kiterjedt a határrétegben bekövetkező sebesség és hőmérséklet eloszlás meghatározására. A hasonlósági transzformáció alkalmazásával a PDE rendszer peremérték feladatát visszavezettem KDE rendszer peremérték feladatára. A (12)-(14) KDE rendszerrel felírt peremérték feladatot numerikusan oldottam meg a magasabb deriváltak módszerével Maple szoftver felhasználásával, vizsgálva a paraméterek megoldásra gyakorolt hatását.

A modell meghatározó paraméterei:

- β ferromágneses paraméter,
- Pr Prandtl-szám
- m hatványtörvény szerint változó hőmérséklet paramétere

A numerikus eredmények megállapításai a következőképpen foglalhatók össze:

- Előállítottam a (12)-(13) egyenletrendszer (13)-(14) peremfeltételeket teljesítő numerikus megoldásait magasabb deriváltak módszerével.
- Kettős numerikus megoldás létezését igazoltam a határréteg sebesség és hőmérséklet eloszlására, melyek kielégítik az egyenleteket az adott peremfeltételek mellett.
- A β ferromágneses paraméter kifejezi a mágneses tér hatását az áramlásra. Megállapítottam, hogy a paraméter értékek növekedése a növeli a sebességi és termikus határréteg vastagságát. Továbbá a termikus határréteg vastagsága kisebb, mint az azonos paraméterértékhez tartozó sebességi határrétegé.

- A Pr növelése a hőmérsékletprofil csökkenéséhez vezet az áramlási tartományban. A Prandtl-szám változása csak a termikus határretegben van hatással.
- A m paraméter növekedése a felületi nyírófeszültség ($f''(0)$) csökkenéséhez vezet, és ellentétes a hatása a hőátadási együtthatóra ($\Theta'(0)$).
- A β paraméter növekedése csökkenti a felületi nyírófeszültséget és növeli a falmenti hőátadási sebességet.

2.5.2 Nanofolyadék áramlásának vizsgálata során elért új eredmények

A (16)-(18) PDE rendszerrel modellezett mono nanofolyadék mozgó síklap fölötti állandósult áramlása során kialakuló határreteg jelenséget vizsgáltam három különböző típusú nanorészecske alkalmazása esetén. A vizsgálat kiterjedt a határretegben bekövetkező sebesség és hőmérséklet eloszlás meghatározására Blasius és Sakadis féle peremfeltételek alkalmazása mellett. A hasonlósági transzformáció alkalmazásával a PDE rendszer peremérték feladatát visszavezettem KDE rendszer peremérték feladatára. A (27)-(28) KDE rendszerrel felírt peremérték feladatot a (29)-(30) és (31)-(32) peremfeltételekre is megoldottam numerikusan Matlab bvp4c algoritmus alkalmazásában.

A kapott numerikus megoldásokban elemeztem a részecskék hatását és összehasonlítottam a hasonlósági megoldásokat a szerzőtársam azonos paraméter értékek mellett CFD módszerrel előállított megoldásaival.

A vizsgálat eredményeiből az alábbi megállapításokat fogalmaztam meg:

Blasius peremfeltétel esetén:

- A legnagyobb sebességet a Fe_3O_4 nanorészecskéket tartalmazó nanofolyadék esetében kaptam.
- A nanoanyag koncentrációjának növelése a sebesség és a hőmérséklet növekedését eredményezte az határretegben.
- A részecskék térfogatarányának növelése hatására a súrlódási együttható és a Nusselt-szám is növekszik.
- Fe_3O_4 esetében a legnagyobb súrlódási együtthatót.
- A Nusselt-szám az Al_2O_3 nanorészecskék esetében a legnagyobb, a TiO_2 esetében a legkisebb.
- A kapott megoldások kiváló egyezést mutatnak Kuznetsov és Nield eredményeivel [37].
- Összehasonlítottam a súrlódási együttható és a lokális Nusselt-szám változását a hasonlósági analízissel és a CFD-módszerrel kapott megoldások esetén. A 0 – 4 térfogat% közötti koncentráció tartományban van egy kisebb eltérés. A legnagyobb különbséget mutató esetben kevesebb, mint 6,7% az eltérés a súrlódási tényezők között míg Nusselt-számok esetében ez kisebb mint 2,3%.

Sakadis peremfeltétel esetén:

- Az alumínium-trioxid-víz elegy határretegében nagyobb sebesség- és hőmérsékletértékeket kaptam, mint a másik két nanorészecske alkalmazása esetén.
- A nanoanyag térfogatarányának növelése a sebesség csökkenését és a hőmérséklet növekedését eredményezte a határretegben.
- A részecskék koncentrációjának növelése hatására a súrlódási együttható és a Nusselt-szám is lineárisan növekszik.

- A Reynolds-szám növelése csökkenti a súrlódási együtthatót és növeli a Nusselt-szám tényezőt.
- A súrlódási együttható értékei alumínium-trioxid (Al_2O_3) esetében kisebbek, mint a titánium-dioxid (TiO_2) és a magnetit (Fe_3O_4) alkalmazása mellett; fordítva igaz ez a Nusselt-szám értékeire, mert azok nagyobbak, mint a másik két anyag esetén.
- A súrlódási együttható és a lokális Nusselt-szám változása megegyezik a Bachok és szerzőtársai [38] által publikálttal.
- A CFD szimulációval kapott eredmények a $Re_x^{1/2} C_f$ és $Re_x^{-1/2} Nu$ értékeknél kissé nagyobb értékeket adtak, ami arra utal, hogy a súrlódásnak a valóságban kissé nagyobbak kell lennie, mint a határretegelmélet szerint számított érték.

2.6 A témához kapcsolódó publikációk

- [P2.1] K. Hriczó: Boundary Value Problem for a Heated Nanofluid Flow in the Presence of Magnetic Field, INTERNATIONAL JOURNAL OF ENGINEERING AND MANAGEMENT, 4(1), (2019), pp. 58-66.
- [P2.2] G. Bognár; M. Klazly; U. S. Mahabaleshwar; G. Lorenzini; K. Hriczó: Comparison of Similarity and Computational Fluid Dynamics Solutions for Blasius Flow of Nanofluid, JOURNAL OF ENGINEERING THERMOPHYSICS 30(3), (2021), pp. 461-475. Q2
- [P2.3] I.F. Barna; G. Bognár; L. Mátyás; K. Hriczó: Self-similar analysis of the time-dependent compressible and incompressible boundary layers including heat conduction, JOURNAL OF THERMAL ANALYSIS AND CALORIMETRY, 147, (23), (2022) pp. 13625-13632. Q1
- [P2.4] G. Bognár; K. Hriczó: Numerical Simulation of Water Based Ferrofluid Flows along Moving Surfaces, PROCESSES 8(7), (2020) Paper: 830
- [P2.5] G. Bognár; K. Hriczó: Ferrofluid Flow in Magnetic Field Above Stretching Sheet with Suction and Injection, MATHEMATICAL MODELLING AND ANALYSIS 25(3), (2020), pp. 461-472.
- [P2.6] G. Bognár; K. Hriczó: Ferrofluid Flow in the Presence of Magnetic Dipole, TECHNISCHE MECHANIK, 39(1) (2019) pp. 3-15.
- [P2.7] G. Bognár; K. Hriczó: Ferrofluid Flow along Stretched Surface under the Action of Magnetic Dipole, WSEAS TRANSACTIONS ON HEAT AND MASS TRANSFER 1,3 (2018) pp. 103-108.
- [P2.8] I. F. Barna; G. Bognár; K. Hriczó: Self-Similar Analytic Solution of the Two-Dimensional Navier-Stokes Equation with a Non-Newtonian Type of Viscosity, MATHEMATICAL MODELLING AND ANALYSIS 21(1), (2016) pp. 83-94.
- [P2.9] G. Bognár; K. Hriczó: Similarity transformation approach for a heated ferrofluid flow in the presence of magnetic field, ELECTRONIC JOURNAL OF QUALITATIVE THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS, 42 (2018) pp. 1-15.

- [P2.10] K. N. Mohsen; K. Hriczó; G. Bognár: Entry length correlations for alumina-water nanofluid in laminar pipe flow, *INTERNATIONAL JOURNAL OF THERMAL SCIENCES* 197, (2024), Paper: 108808
- [P2.11] A. Tanougast; K. Hriczó: Numerical study of the vortex generators effects in a corrugated channel for turbulent flow, *MULTIDISZCIPLINÁRIS TUDOMÁNYOK: A MISKOLCI EGYETEM KÖZLEMÉNYE* 13(4) (2023) pp. 30-41.

2.7 Felhasznált szakirodalom

- [1] K. Hriczó: Newtoni és nem-newtoni folyadékok határreteg problémáinak numerikus és analitikus vizsgálata síkfelületen, PhD értekezés, Miskolci Egyetem, Hatvany József Informatikai Tudományok Doktori Iskola, Témavezető: Vadászné Bognár Gabriella, Védés éve: 2014, Megjelenés/Fokozatszerzés éve: 2015.
- [2] L. Prandtl: Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung, *Verhandlungen des III., Int. Math. Kongr., Heidelberg, Teubner, Leipzig* (1905) pp. 484–491.
- [3] H. Blasius: Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner reibung, *Zeitschrift für Mathematische, Physik*, Vol. 56, (1908) pp. 1–37.
- [4] H. Schlichting and K. Gersten: *Boundary-Layer Theory*, Springer, (2017).
- [5] M. M. Bhatti, T. Abbas, M. M. Rashidi: Numerical Study of Entropy Generation with Nonlinear Thermal Radiation on Magnetohydrodynamics non-Newtonian Nanofluid Through a Porous Shrinking Sheet, *J. Magnetism* 21 (2016), pp. 468–475.
- [6] Y. Hori: *Hydrodynamic Lubrication*, Springer (2006).
- [7] P.A. Libby and H. Fox: Some perturbation solutions in laminar boundary-layer theory, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 17, (1963), pp. 433–449.
- [8] P.K.H. Ma and W.H. Hui: Similarity solutions of the two-dimensional unsteady boundarylayer equations, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 216, (1990), pp. 537–559.
- [9] G.I. Burde: The Construction of special explicit solutions of the boundary-layer equations Steady flows, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 47, (1994), pp. 247–260.
- [10] G.I. Burde: The Construction of special explicit solutions of the boundary-layer equations Unsteady flows, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 48, (1995), pp. 611–633.
- [11] G.I. Burde: New similarity reductions of the steady-state boundary layer equations, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, Vol. 29, (1996), pp. 1665–1683.
- [12] P.D. Weidman: New solutions for laminar boundary layers with cross flow, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, Vol. 48, (1997), pp. 341–356.
- [13] D.K. Ludlow, P.A. Clarkson and A.P. Bassom: New similarity solutions of the unsteady incompressible boundary-layer equations *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 53, (2000), pp. 175–206.

- [14] G. Bognár: Similarity solution of boundary layer flows for non-Newtonian fluids, *International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Vol. 10, (2009), pp. 1555–1566.
- [15] G. Bognár and J. Kovács: Non-isothermal steady flow of power-law fluids between parallel plates, *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, Vol. 6, (2012), pp. 122–129.
- [16] G. Bognár: Analytic Solutions to a Boundary Layer Problem for Non-Newtonian Fluid Flow Driven by Power Law Velocity Profile, *WSEAS Transactions on Fluid Mechanics*, Vol. 6, (2011), pp. 22–31.
- [17] U.S. Mahabaleshwar, P.N. Vinay Kumar, K.R. Nagaraju, G. Bognár and S.N. Ravichandra Nayakar: A New Exact Solution for the Flow of a Fluid through Porous Media for a Variety of Boundary Conditions, *Fluids*, Vol. 4 No. 3, (2019), pp. 1–22.
- [18] L. Sedov: *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, CRC Press, (1993).
- [19] Y. Yang, Z.G. Zhang, E.A. Grulke, W.B. Anderson, G. Wu: Heat transfer properties of nanoparticle-in-fluid dispersions (nanofluids) in laminar flow, *Int. J. Heat Mass Tran.* 48 (6), (2005), pp. 1107–1116.
- [20] Q. Xiong, A. Hajjar, B. Alshuraiaan, M. Izadi, S. Altnji, S.A. Shehzad: State-of-the-art review of nanofluids in solar collectors: a review based on the type of the dispersed nanoparticles, *J. Clean. Prod.* 310, (2021), 127528.
- [21] O. Mahian, A. Kianifar, A.Z. Sahin, S. Wongwises: Performance analysis of a minichannel-based solar collector using different nanofluids, *Energy Convers. Manag.* 88, (2014), pp. 129–138.
- [22] P.K. Kanti, K.V. Sharma, Z. Said, V. Kesti: Entropy generation and friction factor analysis of fly ash nanofluids flowing in a horizontal tube: experimental and numerical study, *Int. J. Therm. Sci.* 166, (2021), 106972.
- [23] P.K. Kanti, K.V. Sharma, A.A. Minea, V. Kesti: Experimental and computational determination of heat transfer, entropy generation and pressure drop under turbulent flow in a tube with fly ash-Cu hybrid nanofluid, *Int. J. Therm. Sci.* 167 (2021), 107016.
- [24] P. Kanti, K.V. Sharma, Z. Said, E. Bellos: Numerical study on the thermo-hydraulic performance analysis of fly ash nanofluid, *J. Therm. Anal. Calorim.* 147 (3), (2022), pp. 2101–2113.
- [25] H. I. Andersson, O. A. Valnes: Flow of a heated Ferrofluid over a stretching sheet in the presence of a magnetic dipole, *Acta Mechanica* 128, (1988), pp. 39–47.
- [26] H. A. Attia, N. A. Kotb: MHD flow between two parallel plates with heat transfer, *Acta Mechanica* 117, (1996), pp. 215–220.
- [27] G. I. Barenblatt: *Scaling, Self-similarity, and Intermediate Asymptotic*, Cambridge Text in Applied Mathematics, Vol. 14, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

- [28] P. G. Siddheshwar, U. S. Mahabaleshwar: Effect of radiation and heat source on MHD flow of a viscoelastic liquid and heat transfer over a stretching sheet *Int. J. Non-Linear Mech.* 40, (2005), pp. 807–820.
- [29] M. M. Bhatti, T. Abbas, M. M. Rashidi: Numerical Study of Entropy Generation with Nonlinear Thermal Radiation on Magnetohydrodynamics non-Newtonian Nanofluid Through a Porous Shrinking Sheet, *J. Magnetism* 21, (2016), pp. 468–475.
- [30] G. Bognár: On similarity solutions of MHD flow over a nonlinear stretching surface in non-Newtonian power-law fluid, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* 6, (2016), pp.1–12.
- [31] G. Bognár, Magnetohydrodynamic Flow of a Power-Law Fluid over a Stretching Sheet with a Power-Law Velocity, in: *Differential and Difference Equations with Applications*, Springer, Basel, (2016), pp.131–139.
- [32] J. L. Neuringer, R. E. Rosensweig: Ferrohydrodynamics, *Phys. Fluids* 7, (1964), pp. 1927–1937.
- [33] J. L. Neuringer: Some viscous flows of a saturated ferrofluid under the combined influence of thermal and magnetic field gradients, *J. Non-linear Mech.* 1 (1966), pp. 123–127.
- [34] J. Chen, D. Sonawane, K. Mitra. V. R. Subramanian: Yet another code for Boundary Value Problems- Higher Derivative Method, manuscript
- [35] H. F. Oztop, E. Abu-Nada: Numerical study of natural convection in partially heated rectangular enclosures filled with nanofluids, *Int. J. Heat Fluid Flow* 29, (2008), pp. 1326–1336.
- [36] H. Gingold: Modelling fluid flow over solid surfaces, *Int. J. Modelling, Identification and Control*, 21, (2014), pp. 237-243.
- [37] A.V. Kuznetsov; D.A. Nield: Natural Convective Boundary-Layer Flow of a Nanofluid past a Vertical Plate, *Int. J. Thermal Sci.*, 49, (2010), pp. 243–247.
- [38] N. Bachok; A. Ishak; I. Pop: Flow and heat transfer characteristics on a moving plate in a nanofluid, *Int. J. Heat Mass Transf.* 55, (2012) pp. 642–648.

3 FELÜLET NÖVEKEDÉSI MODELLEK

3.1 Bevezetés

A mintaképződések a természetben mindenütt előforduló fizikai jelenség. Az 1980-as évektől kezdve kutatják a felületnövekedési folyamatok széles körét, amelyek a természetben, mint spontán módon bekövetkező folyamatok figyelhetőek meg. Ilyen például a kristályok növekedése, szilárdulási folyamatok, határvonalak fejlődése, egy papírlap égése vagy vizesedése során kialakuló határfelületek. Továbbá fontos szerepet játszanak a műszaki tudományokban, mivel a nem-egyensúlyi rendszereknek egyik legérdekesebb megjelenési formái.

Kardar, Parisi és Zhang szerzőhármas által megalkotott modell [39] megad egy sztochasztikus differenciálegyenletet a felületi mintázat fejlődési jelenségének leírására, amelyet azóta számos megközelítésben vizsgáltak és részben bizonyítottak. A KPZ egyenlet megoldásának közelítésére különböző matematikai modellek születtek, amelyek lekövetik a felületi struktúra kialakulásának sztochasztikus viselkedést. Ezek a modellek azonos univerzális skálázási és aszimptotikus tulajdonságokkal rendelkeznek, és ezért a KPZ univerzalitási osztályba tartozónak nevezik őket.

Mérnöki szempontból a felületi architektúrák eredetének megértése elősegíti a bevonatok előállításának jobb kontrollálását, ami új gyártási technológiák kifejlesztését eredményezheti. Tipikus példái nagyon sok, rendkívül hasonló interfészekon található meg, amelyek teljesen különböző folyamatok során keletkeznek, mint pl. az amorf [40] és az epitaxiális vékonyrétegek növekedési folyamatában [41], illetve ionnyalábos porlasztásos erózió (IBS) során [42]. Ezek a kialakuló mintázatok, a kialakuló felületek tulajdonságai a tipikus minta hullámhossza szerint különböző kategóriákba osztályozhatók mind a stacioner, mind az időfüggő (durvuló) viselkedés esetén [43].

3.2 Szakirodalom kritikai elemzése

Hosszú idő óta kihívást jelentő feladat a felületi mintázatok növekedésének meghatározása a klaszterekben és nátronizációs frontokon. A kristálynövekedés során a kialakuló kristályszerkezet érdesedésének alapvető ismerete nyilvánvalóan fontos szerepet játszik a műszaki alkalmazhatóság szempontjából [44]. A Langevin egyenletből származtatható a széles körben elterjedt diffúziós egyenlet legegyszerűbb nemlineáris általánosítása az úgynevezett Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) modell:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \nabla^2 u + \frac{\lambda}{2} (\nabla u)^2 + \eta(x, t) \quad (39)$$

ahol u jelöli a helyhez kötött növekedés profilját [45]. A jobb oldal első kifejezése írja le a felületi feszültség által hajtott határfelületi simítást. A második kifejezés a legalacsonyabb rendű nemlineáris kifejezés, amely az Eden-moddal igazolt felületnövekedési egyenletben megjelenhet, és a felület azon tendenciájából ered, hogy lokálisan önmagára merőlegesen növekszik, és nem egyensúlyi eredetű. A jobb oldalon lévő utolsó tag az úgynevezett Langevin féle zaj tag, amely bármely növekedési modellben a sztochasztikus jelleg modellezésére alkalmazható, legtöbb esetben Gauss-eloszlású.

Az elmúlt három évtizedben számos publikáció jelent meg a KPZ modell vizsgálatáról, melyek közül a teljesség igénye nélkül sorra veszek néhányat.

Barabási és Stanley könyvében található meg a felület növekedés fizikai alapjai [46]. Hwa és Frey [47, 48] a renormálási csoportelmélettel vizsgálta a KPZ modellt, amely módszer egy kifinomult azonban kimerítő alkalmazása a Green függvényeknek.

Kriecherbauer és Krug [49] egy aktuális irodalmi áttekintést készített a hidrodinamikai megőrzési egyenletekből általános áramsűrűségi összefüggéssel származtatott KPZ-modellre. Később Einax és szerzőtársai is egy irodalmi áttekintő tanulmányt tettek közzé a felületeken történő klaszternövekedésről [50].

Számos olyan modell létezik, amely a KPZ egyenlethez hasonló egyenlettel írja le a felületnövekedés, ilyen például a baktériumtelepek határfelületének növekedési modellje [51]. Illetve a KPZ egyenlet általánosításával jutottak el az úgy nevezett Kuramoto-Sivashinsky egyenlethez, amely a $-\nabla^4 u$ taggal bővebb az eredeti egyenlettől [52], [53].

Egy olyan egydimenziós ellenpélda az interfész egyenletre, amely állandó hullámhosszú és amplitúdójú stacionárius mintázatot eredményez igazán meglepő lenne, mert alátámasztaná a megszakított durvulás folyamatának az értelmezését. Az irodalomban olyan kétdimenziós kontinuum modell került bevezetésre, amely a mikro méretekben írja le az erodálódott IBS felületek jellemzőit [54], [55].

A felületi struktúrák kialakításánál számos alkalmazásban jelentős az ún. Molecular Beam Epitaxy (MBE) eljárás, különösen az elektronikai iparban félvezető anyagoknál a szilárd félvezető szubsztrát felületére a vékony filmréteg felvitelében. Nagyon gyakran a kifejlődő film a növekedési eljárás alatt nem marad sík, hanem különböző felületi struktúrák alakulnak ki. Ezen struktúrák típusai rendkívül változatosak és függenek az anyagi, fizikai jellemzőktől és a növesztés feltételeitől [43].

A „Conserved Kuramoto-Sivashinsky” (CKS) egyenlet egy olyan matematikai modell, amellyel az MBE eljárások során nyert felületi morfológiát lehet modellezni. A morfológiai instabilitás legalacsonyabb rendű közelítésében a felület magasságának időbeli alakulása, ami a következő egydimenziós egyenlettel írható le

$$u_t(x, t) = -\nu u_{xx} - K u_{xxxx} + \lambda_1 (u_x)^2 - \lambda_2 ((u_x)^2)_{xx}, \quad (40)$$

ahol u a felület magasságát jelöli, ν , K , λ_1 és λ_2 a kísérleti feltételektől és anyagi jellemzőktől függő állandók. Muñoz-García és szerzőtársai az (40) determinisztikus egyenletet részleteiben nem tanulmányozták [43]. A nagy hullámhosszú instabilitás meghatározását tűzték ki célul és vizsgálataikat pozitív ν and K értékekre korlátozták. Valójában a λ_1 és λ_2 paraméterek rendkívül fontosak, meghatározásukat porlasztásra Castro és szerzőtársai adták meg [54]-ben.

Ha $\lambda_2 = 0$, akkor az (40) parciális differenciálegyenlet a jól ismert Kuramoto-Sivashinsky (KS) egyenlettel egyezik meg, amely a tér- és időbeli káosz mintapéldája (l. [57], [58]). A rendszer leírásában a rendezetlen minták egy jellemző hullámhosszon jönnek létre, amely minta nem durvul. Nagy hossz skálán a Kuramoto-Sivashinsky rendszer a sztohasztikus Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) egyenlettel hatékonyan jellemezhető [42]; ez az egyenlet pedig a kinetikus érdesítés mintapéldája.

A felületi érdesség $w(x_0)$ (globális RMS szélesség) az $w^2(x_0) = \sum_x [u(x, t) - \bar{u}_{x_0}]^2 / x_0$ képlettel jellemzett érték, ahol \bar{u}_{x_0} az u középértékét jelöli az x_0 helyen. A KPZ interfész egyenlet esetén a rendszer oldalirányú L méret hatványával jellemezhető [42]. Ha $\lambda_2 \neq 0$ és $\lambda_1 = 0$, akkor az (40) egyenlet az ún. „Conserved Kuramoto-Sivashinsky” (CKS) egyenlettel egyezik meg. Ezt az egyenletet vékony amorf filmréteg növekedésének modellezésére és vicinális felületek lépés dinamikájára alkalmazzák. Ebben az esetben a lineáris stabilitás paraboloidok rendezett mintázatának kifejlődését eredményezi zavartalan durvulás mellett [54].

3.3 Kardar–Parisi–Zhang (KPZ) modell vizsgálata

Tekintsük a szakirodalom szerint egyik legegyszerűbb és legelterjedtebb diffúziós modellt, amely alkalmas a felületi változások modellezésére, az alábbi formában:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v\nabla^2 u + \frac{\lambda}{2}(\nabla u)^2 + \eta(x, t) \quad (41)$$

ahol u jelöli a helyhez kötött növekedés profilját [45]. A $v\nabla^2 u$ kifejezése írja le a felületi feszültség által hajtott határfelületi simítást. A $\frac{\lambda}{2}(\nabla u)^2$ lokálisan önmagára merőleges növekedést írja le, míg $\eta(x, t)$ az úgynevezett zaj tag, amely a felületnövekedés véletlenszerű behatásait, azaz sztochasztikus viselkedést képviseli a modellben.

A KPZ-egyenlettel foglalkozó tudományos művek száma az elmúlt két évtizedben exponenciálisan növekedett. Számos tanulmány áll rendelkezésre, amelyek mind matematikai, mind fizikai oldalról igyekeznek igazolni az egyenlet létjogosultságát a felületi morfológiák vizsgálatában.

A (41) parciális, nemlineáris differenciálegyenlet megoldását keressük. Mivel az ilyen típusú egyenleteknek nincs általános megoldó sémájuk, így itt is, mint a korábban bemutatott határréteg áramlásban, a hasonlósági transzformációval és speciálisan választott próbafüggvény (Ansatz) módszerével igyekszünk a feladat komplexitását csökkenteni, azaz a PDE-t visszavezetni KDE-re, amely területen már szélesebb eszköztár áll a rendelkezésünkre a megoldások meghatározására.

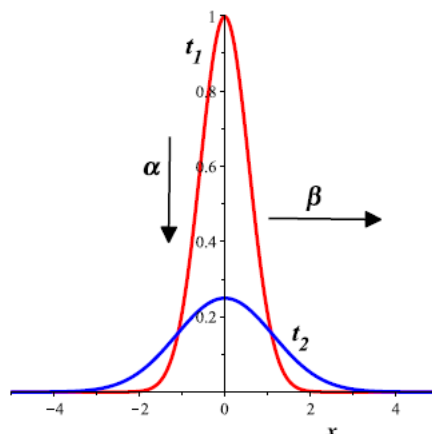
Tekintsük az alábbi egydimenziós önhasonló formulát

$$u(x, t) = t^{-\alpha} f\left(\frac{x}{t^\beta}\right) = t^{-\alpha} f(\omega) \quad (43)$$

ahol $u(x, t)$ a PDE hely és idő függő szabad változója. Az α és β hasonlósági exponensek elsődleges fizikai jelentéssel bírnak, mivel időben ($t > 0$) az α a kialakuló mintázat csúcsainak függőleges irányú csökkenését ($\alpha < 0$ esetén növekedését), amíg a β a kialakuló csúcsok vízszintes irányú terjedését ($\beta < 0$ esetén összehúzódását) határozza meg. Ezen Ansatz (próbafüggvény) alkalmazásának legjelentősebb eredménye a Fourier-fél hővezetési (vagy Fick-féle diffúzió) egyenlet alap megoldása, melyet Gauss féle megoldásnak is neveznek, ahol $\alpha = \beta = 1/2$ és $t_1 < t_2$. Ezen megoldást és az α és β fizikai paraméterek hatását szemlélteti a 8. ábrán látható önhasonló (hasonlósági) megoldások.

Megjegyezzük, hogy a vizsgált PDE esetén az önhasonló megoldás megtartja a diffúziós tulajdonságokat (jó hasonlóságot mutat a normál diffúzióval). Továbbá az önhasonló megoldási mód mellett létezik az ú.n. haladó hullám típusú megoldása is a modellnek, és szükséges megjegyezni, hogy speciális esetben az önhasonló megoldás és a haladó hullám megoldás összefonódik, azaz egymásba transzformálható.

Továbbá fontos tisztázni azt is, hogy a nemlineáris KPZ egyenlet a Hopf-Cole-féle transzformációval ($h = A \ln(y)$) visszavezethető egy sztochasztikus taggal bővített szabályos hővezetési (diffúziós) egyenletre. Összegezve számos általánosítása létezik a feladatnak, melyet most tovább nem részleteznék.



8. ábra A hővezetés önhasznós megoldása $\alpha = \beta = 1/2$ és $t_1 < t_2$ esetén.

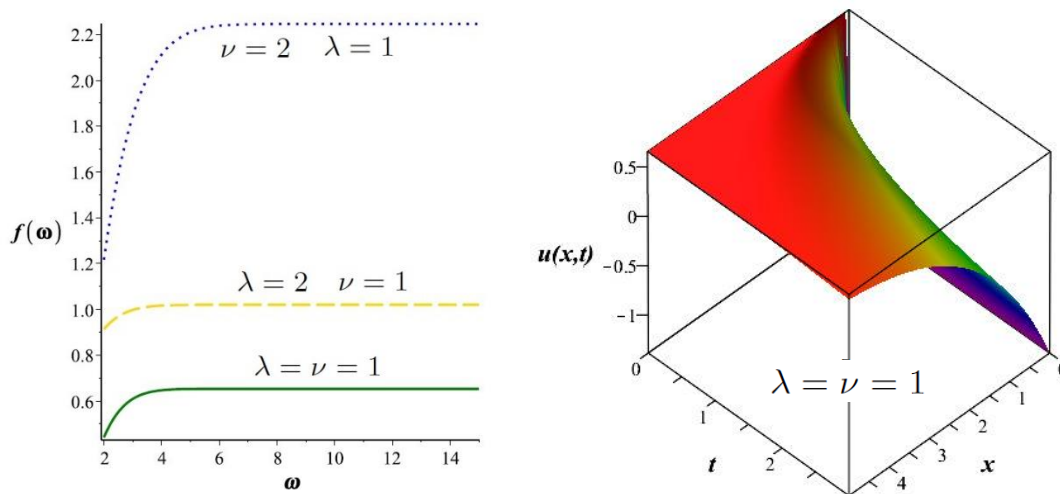
Vizsgálatunkat a (41) egydimenziós egyenlet önhasznós megoldásainak meghatározásával kezdjük különböző alakú zaj tagok esetén. Első esetben vizsgáltuk a zaj mentes ($\eta(x, t) = 0$) esetet, továbbá rögzítjük az $\alpha = 0$ és $\beta = 1/2$ exponens értékeket. Ekkor a (43) Ansatz-ot alkalmazva az alábbi KDE megoldását keressük:

$$\nu f''(\omega) + f'(\omega) \left[\frac{\omega}{2} + \frac{\lambda}{2} f'(\omega) \right] = 0. \quad (44)$$

Az egyenlet megoldása megadható a λ és ν paraméterektől függő általános, zárt alakban, az alábbi formában

$$f(\omega) = 2 \frac{\nu}{\lambda} \left[\frac{\lambda c_1 \sqrt{\pi \nu} \operatorname{erf}[\omega/(2\sqrt{\nu})] + c_2}{2\nu} \right] \quad (45)$$

ahol erf az úgynevezett hibafüggvény [61], c_1 és c_2 integrációs konstansok. A paraméterek adott intervallumbéli értékei mellett a megoldás ábrázolható két- és háromdimenzióban is.



9. ábra A (45) hasonlósági megoldása szemléltetése $c_1 = c_2 = 1$

Több különböző zajra vizsgáltuk az egyenlet megoldhatóságát, ahol azt láttuk, hogy bizonyos paraméter érték mellett léteznek különböző speciális függvényeket tartalmazó zárt alakú megoldások, melyek közül kettőt mutatok még be az alábbiakban.

Elsőként nézzük az úgynevezett Gauss zajjal kiegészített KPZ egyenletet, amely az alábbi formában adódik az önhasonló taranszformációt követően:

$$\nu f''(\omega) + f'(\omega) \left[\frac{\omega}{2} + \frac{\lambda}{2} f'(\omega) \right] + a e^{-\omega^2/n} = 0. \quad (46)$$

Ebben az esetben nem létezik az általános megoldás tetszőleges λ , ν , a és n paraméter értékek mellett, azonban, ha rögzítünk két paramétert a négyből, pl. $\nu = 1/2$ és $n = 1$ akkor már találunk zárt alakú megoldást az alábbi formában

$$f(\omega) = \frac{1}{2\lambda} \ln \left[1 + \tan \{ \sqrt{\lambda a \pi} \operatorname{erf}(\sqrt{\omega/2}) + c_1 \}^2 \right] + c_2 \quad (47)$$

ahol erf az úgynevezett hibafüggvény [62], c_1 és c_2 integrációs konstansok.

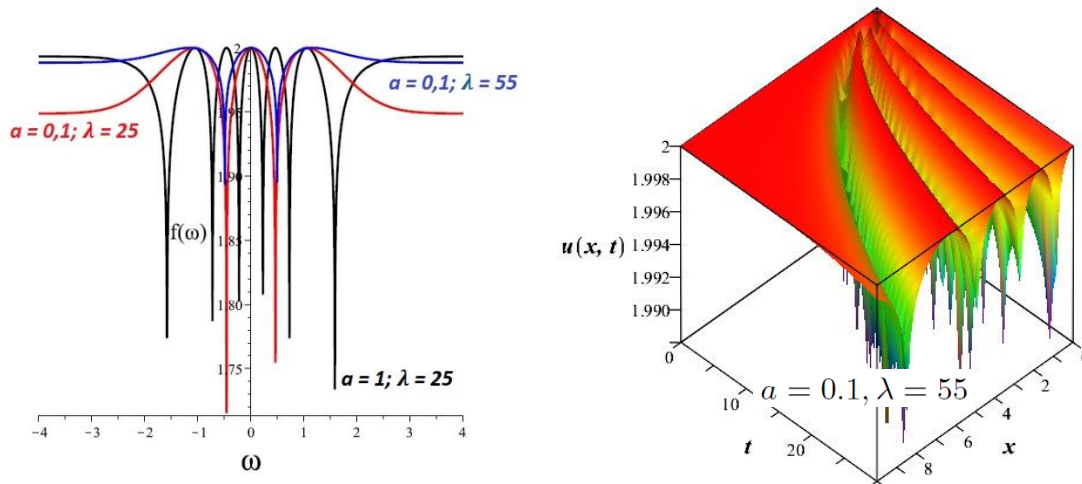
Most vegyük figyelembe a Lorentz zajt, a KDE ebben az esetben az alábbi formába írható

$$\nu f''(\omega) + f'(\omega) \left[\frac{\omega}{2} + \frac{\lambda}{2} f'(\omega) \right] + \frac{a}{1+\omega^2} = 0. \quad (48)$$

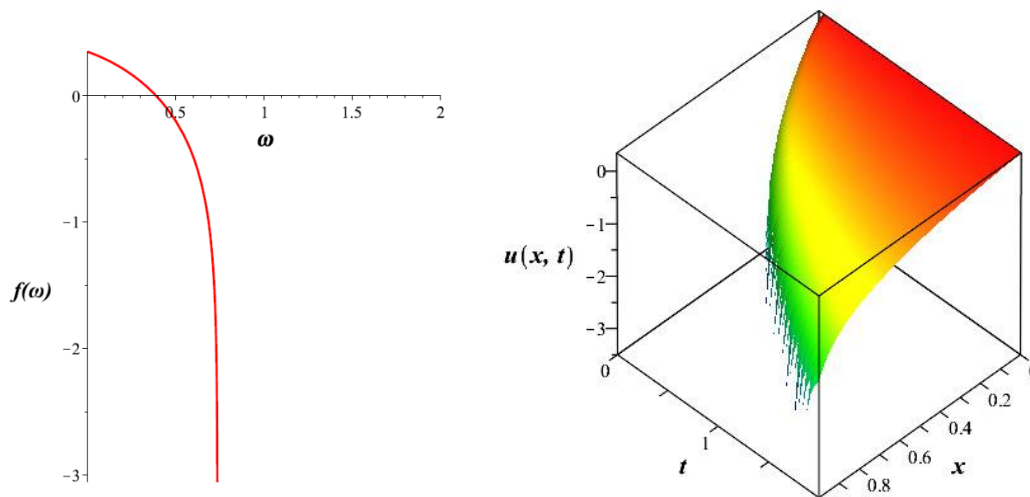
Sajnos ebben az esetben sem létezik zárt alakú, teljesen általános megoldás. A formális megoldásban megtalálható még a konfluens Heun függvény néhány integrálja. Adott pozitív λ és ν paraméterek esetén megadható jól definiált megoldás. Például $a = \nu = 1/2$ és $\lambda = 1$ esetén a formális megoldás a következő függvényként adható meg

$$\begin{aligned} f(\omega) = & -\frac{\omega^2}{4} + \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2} \ln \left\{ \left[-c_2 \omega H_C \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, -\omega^2 \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + c_1 H_C \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, -\omega^2 \right) \right] \right. \\ & / \left[-2\omega^4 H_C \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, -\omega^2 \right) H_{CPrime} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, -\omega^2 \right) \right. \\ & \left. + 2\omega^4 H_{CPrime} \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, -\omega^2 \right) H_C \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, -\omega^2 \right) \right. \\ & \left. + \omega^2 H_C \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, -\omega^2 \right) H_C \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, -\omega^2 \right) \right. \\ & \left. + 2\omega^2 H_{CPrime} \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, -\omega^2 \right) H_C \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, -\omega^2 \right) \right. \\ & \left. - 2\omega^2 H_C \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, -\omega^2 \right) H_{CPrime} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, -\omega^2 \right) \right. \\ & \left. + H_C \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, -\omega^2 \right) H_C \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, -\omega^2 \right) \right] \left. \right\}, \quad (49) \end{aligned}$$

ahol H_C és $H_{C\prime}$ jelöli a konfluens Heun függvényt [59] és annak deriváltját jelöli. Megjegyezzük, hogy ezen speciális függvényektől függő zárt alakú megoldásokat Maple szoftver alkalmazásával írtuk fel és ábráztuk.



10. ábra A (47) hasonlósági megoldása szemléltetése $c_1 = 0; c_2 = n = 1; \nu = 0,5$



11. ábra A (49) hasonlósági megoldása szemléltetése $c_1 = c_2 = 1; a = \nu = 0,5; \lambda = 2$

3.4 Kuramoto–Sivashinsky (KS) modell vizsgálata

A morfológiai instabilitás legalacsonyabb rendű közelítésében a felület magasságának időbeli alakulása, ami a következő egydimenziós egyenlettel írható le

$$u_t(x, t) = -\nu u_{xx} - Ku_{xxx} + \lambda_1(u_x)^2 - \lambda_2((u_x)^2)_{xx}, \quad (50)$$

ahol u a felület magasságát jelöli, ν , K , λ_1 és λ_2 a kísérleti feltételektől és anyagi jellemzőktől függő állandók.

Cél az egydimenziós probléma vizsgálata. A felületi struktúrák fejlődésének elemzését leíró Kuramoto-Shivashinsky egyenletet az (50) egyenletből $\lambda_2 = 0$ helyettesítéssel nyerjük:

$$u_t(x, t) = -\nu u_{xx} - Ku_{xxx} + \lambda_1(u_x)^2.$$

Az (50) egyenlet egy másik speciális esete a „Conserved Kuramoto-Sivashinsky” (CKS) egyenlet, amelyet (50)-ből $\lambda_1 = 0$ helyettesítéssel kapunk:

$$u_t(x, t) = -\nu u_{xx} - Ku_{xxxx} - \lambda_2((u_x)^2)_{xx}. \quad (51)$$

Csökkentsük a paraméterek számát az x és t változókra alkalmazott skálázással, rendre $(K/\nu)^{1/2}$ és K/ν^2 mértékkel. A származtatott egyenlet (51)-ből az

$$u_t + u_{xx} + u_{xxxx} + \gamma((u_x)^2)_{xx} = 0, \quad (CKS)$$

alakba írható, ahol $\gamma = \lambda_2/K$.

Vizsgáljuk meg analitikusan az

$$u(t, x) = u(t, \lambda(t) + u)$$

megoldást valamely $\lambda(t)$ hullámhossz mellett.

Vezessük be az u hasonlósági megoldást az

$$u(t, x) = t^\alpha f(x, t^{-\beta}) \quad \text{és} \quad \lambda(t) = ct^\beta \quad (52)$$

alakban, ahol α a felületre érkező részecskék érkezési sebességét jellemzi, β a felület menti sebességet és $1/\beta$ a felület durvulását.

Tekintsük (51)-t az

$$u_t + \frac{\partial}{\partial x^2} [u + u_{xx} + \gamma(u_x)^2] = 0 \quad (53)$$

alakban. Az $\eta = xt^{-\beta}$ hasonlósági változóra (53) egyenletből a (52)-beli hasonlósági transzformációval a

$$t^{\alpha-1}(\alpha f - \beta \eta f') + t^{\alpha-2\beta} f'' + t^{\alpha-4\beta} f^{(4)} + \gamma t^{2(\alpha-\beta)-2\beta} (f'^2)'' = 0 \quad (54)$$

egyenlet adódik. Innen $\alpha = 1$ és $\beta = 1/2$ helyettesítéssel

$$f - \frac{1}{2} \eta f' + f'' + t^{-1} f^{(4)} + \gamma (f'^2)'' = 0. \quad (55)$$

Kiküszöbölve az időkoordinátát tartalmazó tagot az

$$u(x, t) = \begin{cases} -\frac{1}{4\gamma} x^2 & \text{if } |x| < y(t) \\ 0 & \text{if } |x| \geq y(t) \end{cases}$$

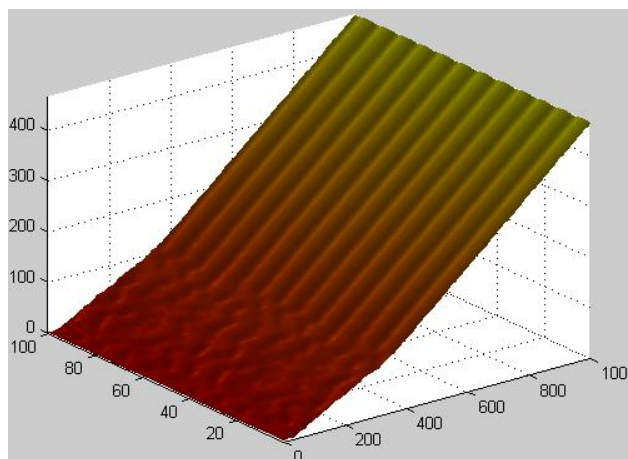
alakú pozitív páros megoldásokat keresünk a (53) egyenlethez, ahol az $y(t)$ valamely ismeretlen függvény. Az u megoldás invariáns a magasság irányú $u(x, t) \rightarrow u(x, t) + \text{const.}$ eltolásra [43].

Megmutattuk, hogy az $y(0)$ értékének nagyságától függően a felületi struktúráképződés más és más. Ha $y(0) < \sqrt{3}$, akkor a parabola alakú megoldásgörbék véges idő múltával összeomlanak. Ha $y(0) = \sqrt{3}$, akkor ez az idő végtelen; egyébként, ha a kezdeti hullámhossz $\lambda(0)$ nagyobb, mint $2y(0) = 2\sqrt{3}$, akkor mind a periódus, mind az amplitúdó korlátlanul nő; a periódus \sqrt{t} -vel, az amplitúdó t szerint növekszik [P3.1].

A CKS egyenlet numerikus megoldásait vizsgáljuk egydimenziós esetben az x és t változókra. A magasság profilra kapott megoldások függenek az egyenletben szereplő γ fizikai paramétertől és a kiinduló felület jellemzőitől. Tekintsük a (CKS) parciális differenciálegyenlet megoldását az

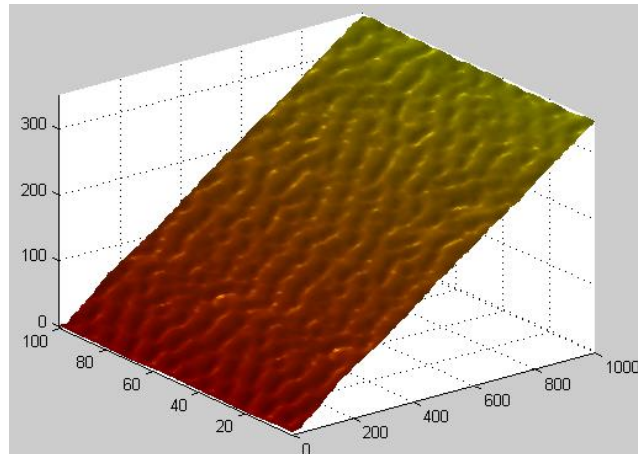
$$u(x, 0) = A(0) \sin \frac{x}{8} (1 + \cos \frac{x}{8}) \quad (\text{KF})$$

kezdeti feltétel mellett, ahol a kezdeti amplitúdó értékét 0,5, vagy 1 értékre vesszük fel. Az alábbi ábrák a felületi morfológia alakulását mutatják az idő és a hely függvényében. Az 12-13. ábrák a (CKS) egyenlet megoldását szemlélteti a (KF) feltétel mellett, ha $A(0) = 0,5$, vagy $A(0) = 1$ esetén $T = 1000$ időegységig.

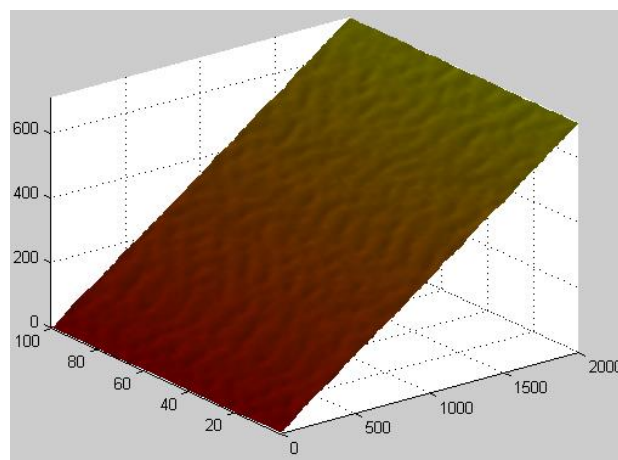


12. ábra Az $u(x, t)$ profil $A(0) = 0,5$ és $\gamma = 0.1$ esetén

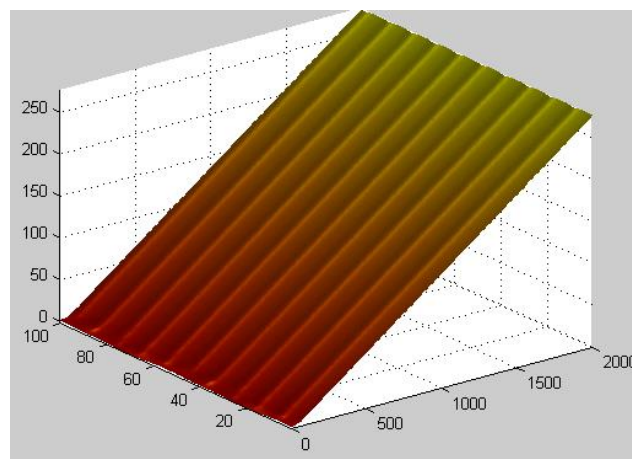
A 14-15. ábrákon a γ paraméter hatását szemléltetjük két különböző érték mellett, ha $\gamma = 0,1$ és $\gamma = 1$.



13. ábra Az $u(x, t)$ profil $A(0) = 1$ és $\gamma = 0.1$ esetén

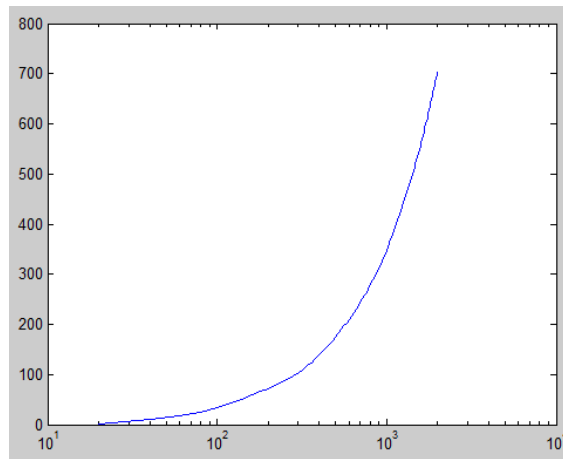


14. ábra Az $u(x, t)$ profil $A(0) = 1$ és $\gamma = 0.1$ esetén

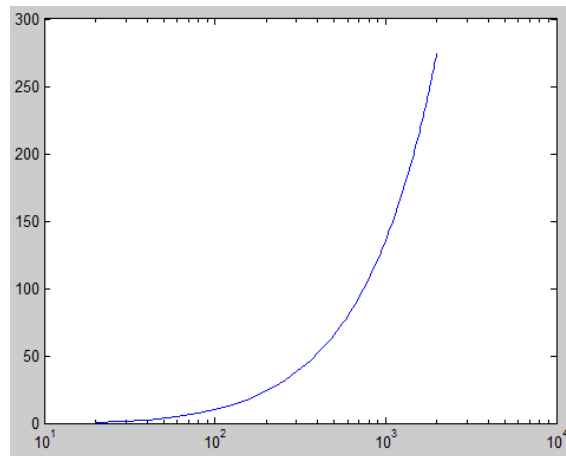


15. ábra Az $u(x, t)$ profil $A(0) = 1$ és $\gamma = 1$ esetén

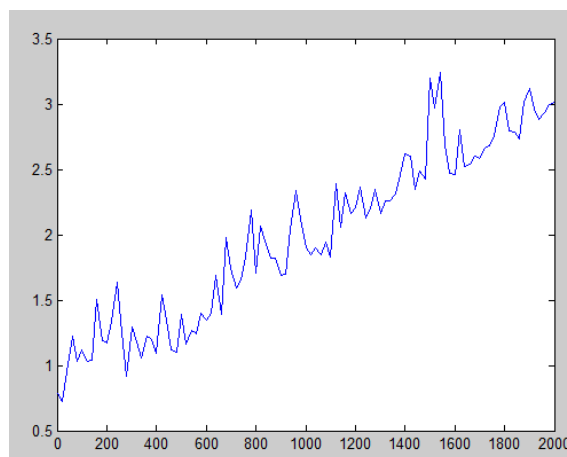
Az $\bar{u}(t) = \frac{1}{L} \int_0^L u(x, t) dx$ átlagos érdesség és a $w(t) = \sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L [u(x, t) - \bar{u}(t)]^2 dx}$ felületi érdesség változását az 16-17. illetve a 18-19. ábrákon mutatjuk be a $[0, 32\pi]$ intervallumon az idő függvényében.



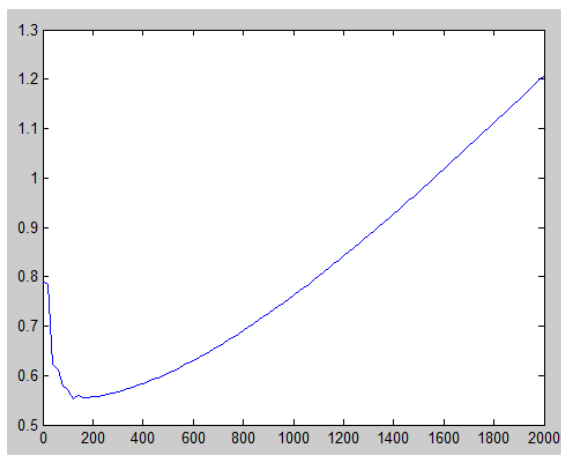
16. ábra Az $\bar{u}(t)$ átlagos érdesség $A(0) = 1$ és $\gamma = 0.1$ esetén a $T=[0, 2000]$ intervallumban



17. ábra Az $\bar{u}(t)$ átlagos érdesség $A(0) = 1$ és $\gamma = 1$ esetén a $T=[0, 2000]$ intervallumban



18. ábra A $w(t)$ felületi érdesség változása $A(0) = 1$ és $\gamma = 0.1$ esetén a $T=[0, 2000]$ intervallumban



19. ábra A $w(t)$ felületi érdesség változása $A(0) = 1$ és $\gamma = 1$ esetén a $T=[0, 2000]$ intervallumban

3.5 Összefoglalás

Felület növekedés témakörében a KPZ és KS modellek vizsgálatával foglalkoztam a fokozatszerzésem óta, mely területen elért új eredményeket az alábbi alfejezetekben összegzem.

3.5.1 KPZ modell vizsgálata során elért új eredmények

Hasonlósági analízissel vizsgáltam a KPZ modell megoldhatóságát különböző zajtényezők figyelembevétele mellett. Az alábbi új eredményeket értem el:

- Alkalmasan választott hasonlósági formulával és speciális paraméter értékek mellett zárt alakú megoldást adtam meg a KPZ egyenletre zajmentes esetben.
- Alkalmasan választott hasonlósági formulával és speciális paraméter értékek mellett zárt alakú megoldást adtam meg a KPZ egyenlet Gauss-féle zajtaggal bővített változatára.
- Alkalmasan választott hasonlósági formulával és speciális paraméter értékek mellett zárt alakú megoldást adtam meg a KPZ egyenlet Lorentz-féle zajtaggal bővített változatára.
- Minden megoldás leírható nem triviális speciális függvények kombinációival, mint például a hiba- vagy Heun függvény.
- A felírt megoldások értelmezési tartománya nyílt, azonban soha nem a teljes valós számtest.
- Az általam megadott zárt alakú analitikus megoldások teljesen összhangban vannak Muravnik [62] állításával, aki szigorú matematikai leírást adott meg a KPZ-hez hasonló, nemlineáris, elliptikus egyenlőtlenségek pozitív megoldásainak hiányosságaira.

3.5.2 KS modell vizsgálata során elért új eredmények

Hasonlósági analízissel vizsgáltam az egydimenziós KS modell megoldhatóságát a modell paramétereinek hatására fókuszálva. Az alábbi új eredményeket értem el:

- Nagyobb amplitúdó kaotikusabb felületi struktúrát eredményez. (A 12-13. ábrák szemléltetik a kezdeti amplitúdó hatását.)
- A γ fizikai paraméter növelése állandósult hullámhosszhoz vezet (lásd 14-15. ábra).
- Az átlagos érdesség az időben parabolikus jellegű növekedést mutat.
- Nagyobb γ esetén az \bar{u} átlagos érdesség nagysága kisebb (lásd 16-17. ábra).
- A $w(t)$ felületi érdesség időbeli változása nagy idő értékekre lineáris növekedési tendenciát mutat (lásd 18-19. ábra).
- Nagyobb γ értékekre $w(t)$ változása simább jellegű.

3.6 A témához kapcsolódó publikációk

- [P3.1] B. Mohammed; G. Bognár; Z. Csáti; M. Guedda; K. Hriczó: Dynamical properties of a nonlinear Kuramoto–Sivashinsky growth equation, ALEXANDRIA ENGINEERING JOURNAL 60(3), (2021), p. 3419
- [P3.2] I. F. Barna; G. Bognár; M. Guedda; L. Mátyás; K. Hriczó: Analytic self-similar solutions of the Kardar-Parisi-Zhang interface growing equation with various noise terms, MATHEMATICAL MODELLING AND ANALYSIS 25(2), (2020), pp. 241-256.
- [P3.3] G. Bognar; M. Guedda; K. Hriczo; L. Taourirte: Instabilities in certain one-dimensional singular interfacial equation, PHYSICA SCRIPTA 95(3), (2020), Paper: 035001
- [P3.4] M. Guedda; K. Hriczo; L. Taourirte; J. Chaiboub; G. Bognar: Scaling properties of a class of interfacial singular equations, CHAOS SOLITONS & FRACTALS 162 (2022) Paper: 112501
- [P3.5] I. F. Barna; G. Bognár; M. Guedda; K. Hriczó: Analytic solutions of the two-dimensional kardar-parisi-zhang growing equation, AIP CONFERENCE PROCEEDINGS 2293, (2020) Paper: 280002

3.7 Felhasznált szakirodalom

- [39] M. Kardar, G. Parisi, Y. C. Zhang: Dynamic scaling of growing interfaces. Physical Review Letters, 56 (9), (1986), pp. 889.
- [40] M. C. Cross, P. C. Hohenberg: Pattern formation outside of equilibrium, Rev. Mod. Phys. 65 (3), (1993), pp. 851-1112.
- [41] P. Politi, G. Grenet, A. Marty, A. Ponchet, J. Villain: Instabilities in crystal growth by atomic or molecular beams, Phys. Rep. 324, (2000), pp. 271-404.
- [42] U. Valbusa, C. Boragno, F. Buatier de Mongeot: Nanostructuring surfaces by ion sputtering, J. Phys.: Condens. Matter 14 (35), (2002), pp. 8153-8175.

- [43] J. Muñoz-García, R. Cuerno, M. Castro: Short-range stationary patterns and long-range disorder in an evolution equation for one-dimensional interfaces, *Phys. Rev. E* 74 (5), (2006), pp. 050103
- [44] A. Pimpinelli; J. Villain: *Physics of Crystal Growth*. Cambridge University Press, 1998.
- [45] T. Martynec; S.H.L. Klapp. Impact of anisotropic interactions on nonequilibrium cluster growth at surfaces. *Phys. Rev. E*, 98, (2018), 042801
- [46] A.-L. Barabási, H. E. Stanley. *Fractal concepts in surface growth*. Press Syndicate of the University of Cambridge, 1995.
- [47] T. Hwa, E. Frey. Exact scaling function of interface growth dynamics. *Physical Review A*, 44 (12), (1991), R7873
- [48] E. Frey, U.C. Täuber, T. Hwa. Mode-coupling and renormalization group results for the noisy Burgers equation. *Physical Review E*, 53 (5), (1996) 4424.
- [49] T. Kriecherbauer, J. Krug: A pedestrian's view on interacting particle systems, KPZ universality and random matrices. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 43(40), (2010) 403001.
- [50] M. Einax, W. Dieterich, P. Maass: Colloquium: Cluster growth on surfaces: Densities, size distributions, and morphologies. *Reviews of modern physics*, 85(3), (2013) p. 921.
- [51] M. Matsushita, J. Wakita, H. Itoh, I. Rafols, T. Matsuyama, H. Sakaguchi and M. Mimura. Interface growth and pattern formation in bacterial colonies, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 249(14), (1998), pp. 517-524.
- [52] Y. Kuramoto, T. Tsuzuki: Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium. *Progress of theoretical physics*, 55(2) (1976) 356-369.
- [53] G.I. Sivashinsk: Large cells in nonlinear Marangoni convection. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 4(2) (1982) pp. 227-235.
- [54] M. Castro, R. Cuerno, L. Vazquez, R. Gago: Self-Organized Ordering of Nanostructures Produced by Ion-Beam Sputtering, *Phys. Rev. Lett.* 94 (1), (2005), 016102
- [55] J. Muñoz-García, M. Castro, R. Cuerno: Nonlinear Ripple Dynamics on Amorphous Surfaces Patterned by Ion Beam Sputtering, *Phys. Rev. Lett.* 96 (8), (2006), 086101
- [56] M. Castro, R. Cuerno: Comment on “Kinetic roughening of ion-sputtered Pd (001) surface: beyond the Kuramoto-Sivashinsky model”, *Phys. Rev. Lett.* 94 (13), (2005), 139601
- [57] Y. Kuramoto: *Chemical oscillations, waves, and turbulence*, Springer, Berlin, 1984.
- [58] G. I. Sivashinsky: Instabilities, Pattern Formation, and Turbulence in Flames, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 15, (1983), pp. 179–199.
- [59] I. F. Barna, R. Kersner: Heat conduction: a telegraph-type model with self-similar behavior of solutions, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 43, (2010) p. 375210.
- [60] I. F. Barna: General self-similar solutions of diffusion equation and related constructions, *Communications in Theoretical Physics* 56, (2011), p. 745.

- [61] W.J.F. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert and C.W. Clark: NIST handbook of mathematical functions, Cambridge University Press, 2010.
- [62] A.B. Muravnik: On absence of global positive solutions of elliptic inequalities with KPZ-nonlinearities. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 64(5), (2019) 736-740

4 KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A téziszfűzetben ismertetett új eredmények a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alap finanszírozásával a TÉT_14_FR-1-2015-0004 számú „AUTO-organization of Nanostructures in Surfaces – AUTONAS” című Francia-Magyar nemzetközi pályázat, a eredmények a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alap finanszírozásával a TÉT_16-1-2016-0164 számú „Tribological modelling and experiment tests in development of advanced nanocomposite materials” című Szerb-Magyar nemzetközi pályázat, illetve a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott K_18 OTKA 129257 számú „Új eredmények vékony filmek növekedési mechanizmusára és néhány tribológiai jellemzőre,” című nemzeti kutatási pályázat keretében valósult meg, melyért köszönet a Magyar Államnak.

Elsőként szeretnék köszönetet mondani Vadászné Dr. Bognár Gabriella professzor asszonynak, aki PhD tanulmányaim után is támogatót, fiatal kutatóként bevont az OTKA és TÉT pályázatok előkészítésébe és megvalósításába. A projektek keretében lehetőséget biztosított nemzetközi konferenciákon való részvételre, ahol megismerhettem a kutatási területem új eredményeit és meghatározó kutatóit. A külföldi utazások alkalmával nemzetközi kapcsolatok ápolására és újak kiépítésére is lehetőségem nyílt, amelynek köszönhetően egy aktív, nemzetközi kutatócsoportban történő közös kutatásokért is szeretném kifejezni hálám.

Köszönöm Dr. Rakaczki Csaba intézet igazgató úrnak és a Matematika Intézetben közvetlen kollégáimnak, hogy támogatták és lehetővé tették munkámat, ezáltal hozzájárultak ezen téziszfűzet elkészítéséhez is. Továbbá a társkarokon dolgozó kollégáimnak, akik szintén hozzájárultak sikereimhez épp úgy, mint kutatócsoportom fiataljai, azaz témavezetésemre bízott doktornadusz hallgatóim.

Szeretném hálámat kifejezni családomnak is, akik mindvégig hittek bennem és támogattak céljaim megvalósításában. Különösen Márta nénémnek, akitől az első laptopomat kaptam még egyetemista koromban, s mindvégig támogatót tanulmányaimban. Pótanyaként szurkolta végig a német nyelvvizsgám, számtalan imát mondott értem, melyek célba értek és eljutottam idáig, ahol már ő nem lehet mellettem személyesen, azonban életem végéig hálás szívvel őrzöm emlékét és a tőle tanultakat!

Végül, de nem utolsó sorban szeretném kifejezni hálám barátaim felé is, akik mindig figyelmeztettek a munka és magánélet egyensúlyának fenntartására. Különös köszönet illeti Balázs és Viktor barátomat, akik olyan közös programokat szerveztek, melyek során ki tudtam eresztetni a munka közben felgyülemlett gőzt és életre szóló élményekkel gazdagodtunk!

Miskolc, 2024. január 10.

Dr. Hriczó Krisztián