

Mechanika

VI. előadás

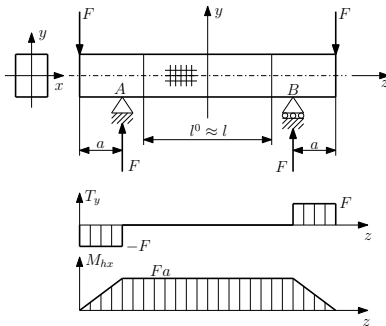
2026. július 2.

6. Tiszta hajlítás

Igénybevétel csak hajlítónyomaték (M_h)

Egyenes hajlítás: $M_h = M_{hx}$ és x vagy y szimmetriatengelye a keresztmetszetnek.

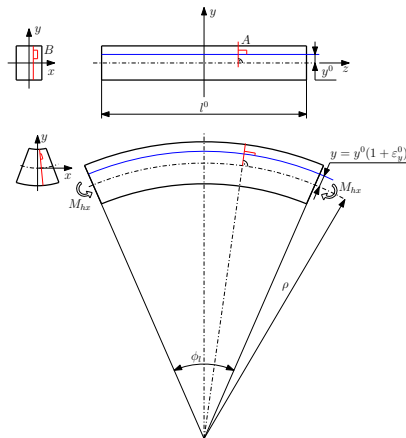
Alapkísérlet:



6. Tiszta hajlítás

A kísérlet tárgya:
a rúd tisztán hajlított l hosszúságú darabja:
Kísérleti tapasztalatok:

- meggörbül a rúd
- $l = \rho \phi_l$ a meggörbült rúd középvonala, melynek hossza nem változik
- a keresztmetszet torzul, de sík marad és merőleges marad a meggörbült középvonalra
- az A és B elemi keresztmetszet darabok alakváltozása az ábrán látható
- nincs γ szögtorzulás



6. Tiszta hajlítás

Bázisvektorok deformációja:

$$y > 0 \Rightarrow \varepsilon_z > 0, \varepsilon_x = \varepsilon_y < 0$$

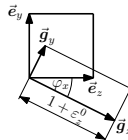
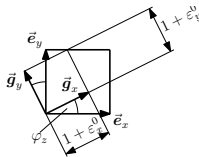
itt a hosszanti szál nyúlik,

$$y < 0 \Rightarrow \varepsilon_z < 0, \varepsilon_x = \varepsilon_y > 0$$

itt a hosszanti szál zsugorodik

Kis forgás és alakváltozás:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_x, \varphi_y \ll 1 \\ y \approx y^0, \varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_z^0 \ll 1 \end{array} \right\} \varepsilon^0 \approx \varepsilon$$



6. Tiszta hajlítás

Tehát az alakváltozási tenzor:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Tapasztalat:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_k = -\nu \varepsilon_z$$

$$\varepsilon_z = \frac{l - l^0}{l^0} = \frac{(\rho + y)\phi_l - \rho\phi_l}{\rho\phi_l} = \frac{y}{\rho}$$

vagy

$$\varepsilon_z = \kappa y; \quad \text{itt: } \kappa = \frac{1}{\rho} \text{ a görbület}$$

tehát

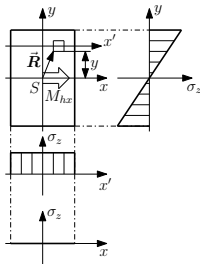
$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}(y)$$

Feszültségi állapot:

$$\sigma_z = E \varepsilon_z = \frac{E}{\rho} y \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\mathbf{T}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

6. Tiszta hajlítás

A feszültségeloszlás:



$$\vec{p}_z = \sigma_z \vec{e}_z = \frac{E}{\rho} y \vec{e}_z$$

$$\vec{R} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y$$

$$\vec{F}_S = \int_A \vec{p}_z dA = \frac{E}{\rho} \underbrace{\int_A y dA}_{0 \text{ mert } O=S} = \vec{0}$$

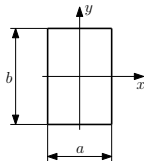
$$\vec{M}_S = \int_A \vec{R} \times \vec{p}_z dA = \int_A (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y) \times \left(\frac{E}{\rho} y \right) dA =$$

$$= -\frac{E}{\rho} \int_A xy dA \vec{e}_y + \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA \vec{e}_x$$

Itt $I_x = \int_A y^2 dA$ az ún. x tengelyre számított másodrendű (tehetetlenségi) nyomaték, $I_{xy} = \int_A xy dA$ pedig az xy tengelypárra számított másodrendű nyomaték.

6. Tiszta hajlítás

Pl.: téglalap keresztmetszet



$$I_x = \int_A y^2 dA = a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy = \left[a \frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} =$$

$$a \frac{b^3}{3 \cdot 8} \cdot 2 \rightarrow I_x = \frac{ab^3}{12}$$

hasonlóan: $I_y = \frac{ba^3}{12}$

$I_{xy} = \int_A xy dA = 0$, mert van szimmetriatengely.

Most $I_{xy} = 0$, így

$$\vec{M}_S = -\frac{E}{\rho} I_{xy} \vec{e}_y + \frac{E}{\rho} I_x \vec{e}_x \Rightarrow \vec{M}_S = \frac{E}{\rho} I_x \vec{e}_x = M_{hx} \vec{e}_x$$

Következmény:

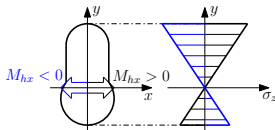
$$M_{hx} = \frac{E}{\rho} I_x$$

6. Tiszta hajlítás

Így a feszültség:

$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y$$

Az ún. zérusvonal: $\sigma_z = 0$ vonal $y = 0$ -nál. A zérusvonal párhuzamos M_{hx} -szel (a hajlítás tengelyével). Ábrázolás:



Maximális feszültség:

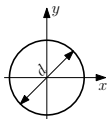
$$\sigma_{z\max} = \sigma_{\max} = \frac{|M_{hx}|}{I_x} y_{\max} = \frac{|M_{hx}|}{K_x}$$

$K_x = \frac{I_x}{y_{\max}}$ az x tengelyre számított keresztmetszeti tényező. Például téglalapra:

$$K_x = \frac{ab^3}{12} \frac{2}{b} = \frac{ab^2}{6}$$

6. Tiszta hajlítás

Pl.: kör keresztmetszet



Csavarásnál már láttuk, hogy

$$I_p = \int_A R^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \frac{d^4 \pi}{32}$$

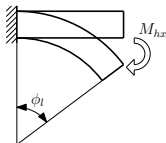
$$\left. \begin{array}{l} I_x = \int_A y^2 dA \\ I_y = \int_A x^2 dA \end{array} \right\} \Rightarrow I_x = I_y$$

$$I_p = I_x + I_y \Rightarrow I_x = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{d^4 \pi}{64}$$

$$K_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{I_x}{d/2} = \frac{d^4 \pi}{64} \frac{2}{d} = \frac{d^3 \pi}{32}$$

6. Tiszta hajlítás

Jellemző alakváltozás

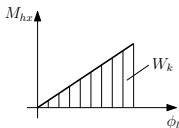


$$\phi_l = \frac{l}{\rho} = \frac{M_{hx} l}{I_x E}$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M_{hx}}{I_x E}$$

6. Tiszta hajlítás

Alakváltozási energia:



$$U = W_k = \frac{1}{2} M_{hx} \phi_l = \frac{1}{2} \frac{M_{hx}^2}{I_x E} l$$

Méretezés – ellenőrzés:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{hx}|}{K_x}$$

Ellenőrzés:

$$\sigma_{\text{meg}} = \frac{\sigma_{\text{jell}}}{n}$$

Ha $\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{meg}}$ megfelel; ha $\sigma_{\max} > \sigma_{\text{meg}}$ nem felel meg.

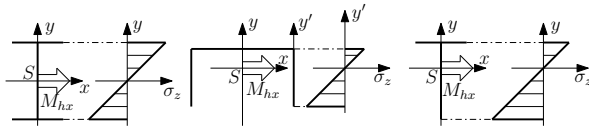
Méretezés:

$$\frac{|M_{hx}|}{K_x} \leq \sigma_{\text{meg}} \Rightarrow K_x \geq \frac{|M_{hx}|}{\sigma_{\text{meg}}} = K_{x\text{szüks}}$$

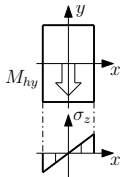
6. Tiszta hajlítás

Általánosítás:

– szimmetria tengely:



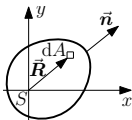
– y tengely irányú hajlító nyomaték: M_{hy}



$$\sigma_z = \frac{M_{hy}}{I_y} x$$

6. Tiszta hajlítás

Tehetetlenségi jellemzők:



S pontra a statika nyomaték zérus:

$$\int_A x dA = \int_A y dA = 0$$

tengelyre:

$$I_x = \int_A y^2 dA; I_y = \int_A x^2 dA$$

tengelypárra:

$$I_{xy} = \int_A xy dA$$

tehetetlenségi vektor és tenzor definíció szerint:

$$\vec{I}_n = \int_A \vec{R} \times (\vec{n} \times \vec{R}) dA = \underline{I}_S \cdot \vec{n}$$

A kifejtési tétel: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

6. Tiszta hajlítás

Legyen például $\vec{n} = \vec{e}_x$

$$\begin{aligned}\vec{I}_x &= \int_A \vec{R} \times (\vec{e}_x \times \vec{R}) dA = \int_A \left[R^2 \vec{e}_x - (\vec{R} \cdot \vec{e}_x) \vec{R} \right] dA = \int_A \left[(x^2 + y^2) \vec{e}_x - x(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) \right] dA = \\ &= \underbrace{\int_A y^2 dA \vec{e}_x}_{I_x} - \underbrace{\int_A xy dA \vec{e}_y}_{I_{xy}} \\ \vec{I}_x &= \underline{I}_S \cdot \vec{e}_x = I_x \vec{e}_x - I_{xy} \vec{e}_y\end{aligned}$$

Legyen például $\vec{n} = \vec{e}_y$

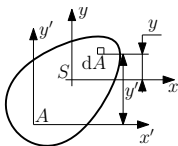
$$\begin{aligned}\vec{I}_y &= \int_A \vec{R} \times (\vec{e}_y \times \vec{R}) dA = \int_A \left[R^2 \vec{e}_y - (\vec{R} \cdot \vec{e}_y) \vec{R} \right] dA = \int_A \left[(x^2 + y^2) \vec{e}_y - y(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) \right] dA = \\ &= - \underbrace{\int_A xy dA \vec{e}_x}_{I_{xy}} + \underbrace{\int_A x^2 dA \vec{e}_y}_{I_y} \\ \vec{I}_y &= \underline{I}_S \cdot \vec{e}_y = -I_{xy} \vec{e}_x + I_y \vec{e}_y\end{aligned}$$

6. Tiszta hajlítás

Így a súlyponti tehetetlenségi tenzor:

$$[I_S] = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix}$$

Steiner-tétel:



$$\begin{aligned} I_{x'} &= \int_A y'^2 dA = \int_A (y + y_{SA})^2 dA = \\ &= \int_A y^2 dA + 2y_{SA} \underbrace{\int_A y dA}_0 + y_{SA}^2 A \end{aligned}$$

$$\text{Tehát } I_{x'} = I_x + y_{SA}^2 A$$

$$\text{Hasonlóan: } I_{y'} = I_y + x_{SA}^2 A$$

$$\begin{aligned} I_{x'y'} &= \int_A x' y' dA = \int_A (x + x_{SA})(y + y_{SA}) dA = \int_A xy dA + x_{SA} \int_A y dA + y_{SA} \int_A x dA + x_{SA} y_{SA} \int_A dA = \\ &= I_{xy} + x_{SA} y_{SA} A \end{aligned}$$

6. Tiszta hajlítás

$\underline{I}_S$ főtengely-problémája:

$$\underline{I}_S \cdot \vec{n} = \lambda \vec{n}; \quad \lambda; \vec{n} = ?$$

$$\underline{I}_S \cdot \vec{n} - \lambda \underbrace{\vec{n}}_{\underline{1} \cdot \vec{n}} = \vec{0} \Rightarrow (\underline{I}_S - \lambda \underline{1}) \cdot \vec{n} = \vec{0}$$

Kifejtve:

$$\begin{bmatrix} I_x - \lambda & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Triviálistól eltérő megoldás:

$$\det(\underline{I}_S - \lambda \underline{1}) = (I_x - \lambda)(I_y - \lambda) - I_{xy}^2 = 0$$

Kifejtve nyerjük az ún. karakterisztikus egyenletet:

$$\lambda^2 - (I_x + I_y)\lambda + \underbrace{I_x I_y - I_{xy}^2}_{\det \underline{I}_S} = 0$$

Mindig van valós megoldása: $\lambda_1 = I_1; \lambda_2 = I_2 \neq I_1$

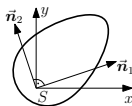
6. Tiszta hajlítás

Visszaírva számítható a főtegyelt kijelölő irányvektor két koordinátájának aránya:

$$\begin{bmatrix} I_x - I_1 & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y - I_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{n_{1x}}{n_{1y}} = \dots$$

Főirányok:

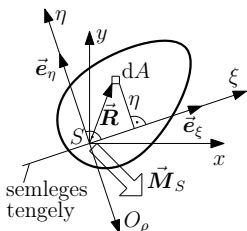
$$\underline{I}_S^{(1,2)} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$$



6. Tiszta hajlítás

Ferde hajlítás: tetszőleges keresztmetszet, tetszőleges $\vec{M}_S$

Tapasztalat: van semleges tengely,
ez a ξ , mely körül a keresztmetszet elfordul



$$\vec{M}_S = M_x \vec{e}_x + M_y \vec{e}_y, \quad \vec{R} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y,$$

$$\vec{R} = \xi \vec{e}_\xi + \eta \vec{e}_\eta$$

$$\varepsilon_z = \frac{\eta}{\rho} \Rightarrow \sigma_z = E \varepsilon_z$$

$$\vec{p}_z = \sigma_z \vec{e}_z = \frac{E}{\rho} \eta \vec{e}_z = \frac{E}{\rho} \vec{e}_\xi \times \vec{R}$$

Mivel

$$\vec{e}_\xi \times \vec{R} = \vec{e}_\xi \times (\xi \vec{e}_\xi + \eta \vec{e}_\eta) = \eta \vec{e}_z$$

Így

$$\vec{M}_S = \int_A \vec{R} \times \vec{p}_z dA = \frac{E}{\rho} \int_A \underbrace{\vec{R} \times (\vec{e}_\xi \times \vec{R})}_{\vec{I}_\xi = I_S \cdot \vec{e}_\xi} dA \Rightarrow \vec{M}_S = \frac{E}{\rho} I_S \cdot \vec{e}_\xi$$

6. Tiszta hajlítás

$\frac{E}{\rho} \vec{e}_\xi$ származtatása:
Inverz tenzor:

$$\underline{I}_{\underline{S}}^{-1} \cdot \underline{I}_{\underline{S}} = \underline{1}$$

$$\underline{I}_{\underline{S}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{I}_{\underline{S}}} \begin{bmatrix} I_y & I_{xy} \\ I_{xy} & I_x \end{bmatrix}, \quad \det \underline{I}_{\underline{S}} = I_x I_y - I_{xy}^2$$

$$\underline{I}_{\underline{S}}^{-1} \cdot \vec{M}_S = \frac{E}{\rho} \underbrace{\underline{I}_{\underline{S}}^{-1} \cdot \underline{I}_{\underline{S}}}_{\underline{1}} \cdot \vec{e}_\xi = \frac{E}{\rho} \vec{e}_\xi$$

Így

$$\vec{p}_z = \underline{I}_{\underline{S}}^{-1} \cdot \vec{M}_S \times \vec{R}$$

$$\begin{aligned} \vec{p}_z &= \frac{1}{\det \underline{I}_{\underline{S}}} [(I_y M_x + I_{xy} M_y) \vec{e}_x + (I_{xy} M_x + I_x M_y) \vec{e}_y] \times \vec{R} = \\ &= \left[\frac{I_y M_x + I_{xy} M_y}{\det \underline{I}_{\underline{S}}} y - \frac{I_{xy} M_x + I_x M_y}{\det \underline{I}_{\underline{S}}} x \right] \vec{e}_z \end{aligned}$$

6. Tiszta hajlítás

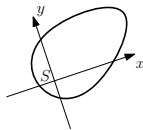
Következmény: tetszőleges keresztmetszetet tetszőleges hajlítónyomatékkal terhelve a következő általános képletet kapjuk a feszültségre:

$$\sigma_z = \frac{I_y M_x + I_{xy} M_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} y - \frac{I_{xy} M_x + I_x M_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} x$$

Legyen x és y a főtengelyek koordináta-rendszere:

$$I_{xy} = \int_A xy dA = 0, \quad [I_{\underline{S}}] = \begin{bmatrix} I_x & 0 \\ 0 & I_y \end{bmatrix}$$

$$\det I_{\underline{S}} = I_x I_y$$

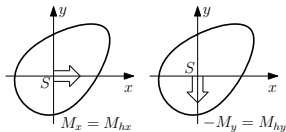


Ezeket visszaírva az általános feszültség képletébe kapjuk:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

6. Tiszta hajlítás

Szuperpozíció:



$$\sigma'_z = \frac{M_x}{I_x} y = \frac{M_{hx}}{I_x} y$$

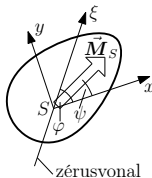
$$\sigma''_z = -\frac{M_y}{I_y} x = \frac{M_{hy}}{I_y} x$$

Így

$$\sigma_z = \sigma'_z + \sigma''_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hy}}{I_y} x$$

6. Tiszta hajlítás

Zérusvonal: $\sigma_z = 0$



$$y = -\frac{M_{hy} I_x}{M_{hx} I_y} x = \underbrace{\frac{M_y I_x}{M_x I_y}}_{\tan \varphi} x = \tan \varphi x$$

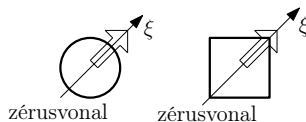
Egyenes hajlítás: $\vec{M}_S$ párhuzamos a keresztmetszet valamelyik főtengelyével.

Ferde hajlítás: $\vec{M}_S$ nem párhuzamos a keresztmetszet egyik főtengelyével sem.

6. Tiszta hajlítás

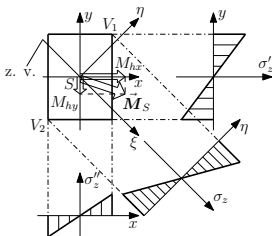
$$\tan \varphi = \frac{M_y}{M_x} \frac{I_x}{I_y} = \tan \psi \frac{I_x}{I_y}$$

Speciális eset: $\varphi = \psi$, ha $I_x = I_y$. Pl. kör vagy négyzet keresztmetszet:



6. Tiszta hajlítás

Téglalap keresztmetszetenél:



$$\sigma'_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y$$

$$\sigma''_z = \frac{M_{hy}}{I_y} x$$

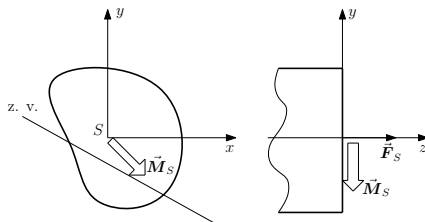
$$\sigma_z = \sigma'_z + \sigma''_z = \frac{E}{\rho} \eta$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_z(V_1) = |\sigma_z(V_2)| = \frac{M_{hx}}{K_x} + \frac{M_{hy}}{K_y}$$

7. Összetett igénybevételek

Továbbra is kis alakváltozásokkal foglalkozunk és érvényesnek tekintjük a szuperpozíció elvét.

7.1 Húzás és hajlítás: először egytengelyű feszültségállapotot létrehozó igénybevétel kombinációkkal foglalkozunk



A súlypontba redukált vektorkettős:

$$\vec{F}_S = N\vec{e}_z; \quad \vec{M}_S = M_{hx}\vec{e}_x - M_{hy}\vec{e}_y$$

x és y legyenek tehetetlenségi főtengelyek ($I_{xy} = \int_A xy dA = 0$), így a feszültség:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x}y + \frac{M_{hy}}{I_y}x$$

7. Összetett igénybevételek

zérusvonal:

$$\sigma_z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{I_x}{M_{hx}} \left(\frac{N}{A} + \frac{M_{hy}}{I_y} x \right)$$

maximális feszültség (veszélyes pont a zérusvonalától legtávolabb eső pont):

$$\sigma_{\max} = \sigma_z = \frac{|N|}{A} + \frac{|M_{hx}|}{K_x} + \frac{|M_{hy}|}{K_y}$$

ellenőrzés:

$$\sigma_{\text{meg}} \geq \sigma_{\max}$$

méretezés több lépésben:

- 1 csak M_{hx} -re és M_{hy} -ra méretezünk $\Rightarrow$ keresztmetszet mérete
- 2 ezzel a mérettel ellenőrzés minden igénybevételre ($N + M_{hx} + M_{hy}$ -ra)

alakváltozások:

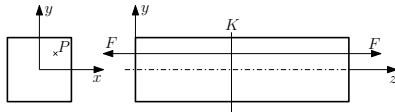
$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}; \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_k = -\nu \varepsilon_z$$

alakváltozási energia:

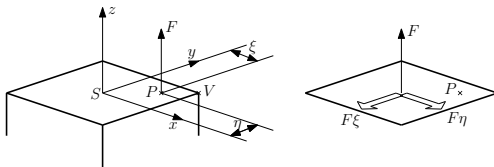
$$U = \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{AE} + \frac{1}{2} \frac{M_{hx}^2 l}{I_x E} + \frac{1}{2} \frac{M_{hy}^2 l}{I_y E}$$

7. Összetett igénybevételek

Speciális eset: excentrikus húzás/nyomás



F támadáspontja: $P(\xi, \eta)$, így a keresztmetszet igénybevétele:



$$N = F; \quad M_{hx} = \eta F; \quad M_{hy} = \xi F$$

feszültség:

$$\sigma_z = \frac{F}{A} + \frac{\eta F}{I_x} y + \frac{\xi F}{I_y} x$$

7. Összetett igénybevételek

zérusvonal:

$$\sigma_z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{I_x}{\eta} \left(\frac{1}{A} + \frac{\xi}{I_y} x \right)$$

maximális feszültség a veszélyes pontban (ábrán: V)

Speciális eset: $\xi = 0$, vagyis az erő támadáspontja épp az y tengelyen van:

a zérusvonal

ekkor egyszerűbb, melybe ha a téglalapra érvényes képleteket behelyettesítjük:

$$y = -\frac{I_x}{\eta A} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{ab^3}{12\eta ab} = -\frac{b^2}{12\eta}$$

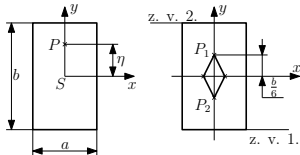
ha

a zérusvonal épp az alsó oldalélre esik, akkor

$y = -\frac{b}{2}$ a zérusvonal egyenlete, ami alapján

$$-\frac{b}{2} = -\frac{b^2}{12\eta} \quad \Rightarrow \quad \eta = -\frac{b}{6}$$

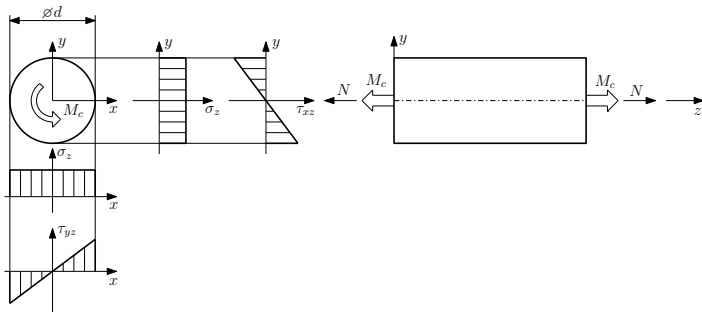
ez alapján kijelölhető az ún. **magidom** (ábrán a súlypont körüli rombusz). Ha itt terheljük F erővel a keresztmetszetet, akkor az egész keresztmetszetben azonos előjelű feszültség alakul ki.



7. Összetett igénybevételek

Kéttengelyű feszültségállapotok:

7.2 Húzás és csavarás: (csak kör és körgyűrű keresztmetszet)



Húzásból: $\sigma_z = \frac{N}{A}$, $\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$, $\varepsilon_k = -\nu \varepsilon_z$

Csavarásból: $\tau_{\varphi z} = \frac{M_c}{I_p} R$, $\gamma_{\varphi z} = \frac{\tau_{\varphi z}}{G}$, $E = 2G(1 + \nu)$

7. Összetett igénybevételek

Különböző feszültségek ébrednek a keresztmetszetben, melyből azonos veszélyességű húzófeszültséget számolunk. Erre szolgál a **redukált feszültség**, melyet a megengedett feszültséggel már össze lehet vetni. A Mohr-köröknél már látott két elméletből levezethető, hogy:

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma_z^2 + \beta \tau_{\varphi z}^2}$$

ahol

$$\beta = \begin{cases} 3, & \text{Huber-Mises-Hencky elmélet esetén} \\ 4, & \text{Mohr-elmélet esetén} \end{cases}$$

így

$$\sigma_{\text{red}}^{\text{max}} = \sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^2 + \beta \left(\frac{M_C}{K_\rho}\right)^2}$$

ellenőrzés:

$$\sigma_{\text{red}}^{\text{max}} \leq \sigma_{\text{meg}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^2 + \beta \left(\frac{M_C}{K_\rho}\right)^2} \leq \sigma_{\text{meg}}$$

méretezés két lépésben:

- 1 csak M_C -re méretezünk: $\sqrt{\beta} \frac{|M_C|}{K_\rho} \leq \sigma_{\text{meg}} \rightarrow d_{\text{szüks}} = \dots$
- 2 ez alapján d -t megválasztva ellenőrzés minden igénybevételre ($N + M_C$ -re)

7. Összetett igénybevételek

Ismert méretezési eljárás az eddigiek alapján csak M_c -re:

$$\tau_{\max} = \frac{|M_c|}{K_p} \leq \tau_{\text{meg}}$$

most

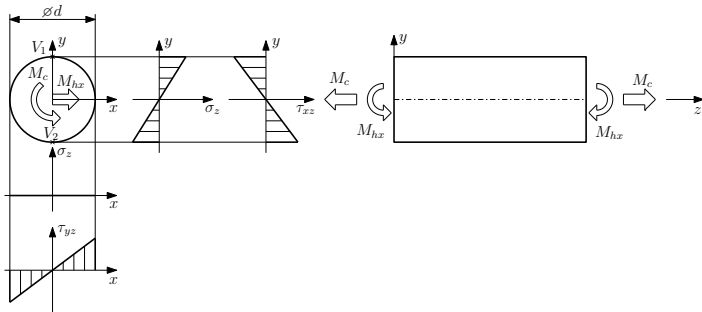
$$\sqrt{\beta} \tau_{\max} \leq \sigma_{\text{meg}}$$

tehát

$$\sigma_{\text{meg}} = \sqrt{\beta} \tau_{\text{meg}}$$

7. Összetett igénybevételek

7.3 Hajlítás és csavarás:



itt is $\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma_z^2 + \beta \tau_{\varphi z}^2}$, a veszélyes pontok pedig V_1 és V_2

hajlítás: $\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y$

csavarás: $\tau_{\varphi z} = \frac{M_c}{I_p} R$

7. Összetett igénybevételek

vagyis a redukált feszültség:

$$\sigma_{\text{red}}^{\text{max}} = \sqrt{\left(\frac{M_{hx}}{K_x}\right)^2 + \beta \left(\frac{M_c}{K_p}\right)^2}$$

Kör és körgyűrű keresztmetszet esetén igaz, hogy $K_p = 2K_x$ és $I_p = 2I_x$ így

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{1}{K_x} \underbrace{\sqrt{M_{hx}^2 + \frac{\beta}{4} M_c^2}}_{M_{\text{red}}}$$

tehát

$$\sigma_{\text{red}}^{\text{max}} = \frac{M_{\text{red}}}{K_x}$$

ellenőrzés:

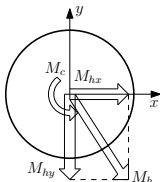
$$\frac{M_{\text{red}}}{K_x} \leq \sigma_{\text{meg}}$$

méretezés:

$$K_x \geq \frac{M_{\text{red}}}{\sigma_{\text{meg}}} = K_{\text{szüks}} \rightarrow d_{\text{szüks}} = \dots$$

7. Összetett igénybevételek

általánosítás:



$$M_h^2 = M_{hx}^2 + M_{hy}^2$$

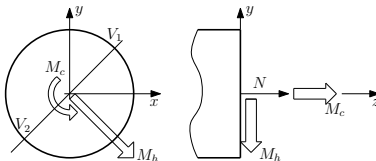
$$M_{\text{red}} = \sqrt{M_h^2 + \frac{\beta}{4} M_c^2}$$

$$M_{\text{red}} = \sqrt{M_{hx}^2 + M_{hy}^2 + \frac{\beta}{4} M_c^2}$$

Innentől használhatóak ez előző fóliákon látott képletek az ellenőrzés/méretezés kérdésére.

7. Összetett igénybevételek

7.4 Húzás/nyomás + hajlítás + csavarás



Húzás: $\sigma'_z = \frac{N}{A}$

Hajlítás x körül: $\sigma''_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y$

Hajlítás y körül: $\sigma'''_z = \frac{M_{hy}}{I_y} x$

Csavarás: $\tau_{\varphi z} = \frac{M_c}{I_p} R$

A redukált feszültség:

$$\sigma_{\text{red}}^{\text{max}} = \sqrt{\left(\frac{|N|}{A} + \frac{|M_{hx}|}{K_x} + \frac{|M_{hy}|}{K_y} \right)^2 + \beta \left(\frac{|M_c|}{K_p} \right)^2}$$