

Mechanika

V. előadás

2026. július 2.

3. Feszültségi állapot

Mohr-féle feszültségi kördiagram:

Cél: egy feszültségi
főtengety ismeretében előállítani a többi

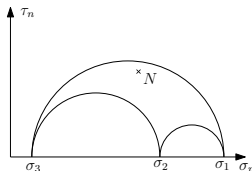
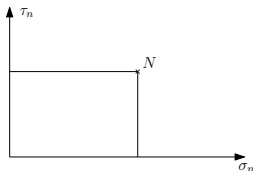
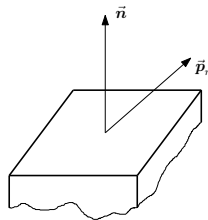
Ábrázolás:

$$\vec{p}_n = \sigma_n \vec{n} + \vec{\tau}_n$$

Továbbiakban jelölés:

$$\tau_n = |\vec{\tau}_n| \geq 0$$

$\vec{p}_n \rightarrow N(\sigma_n, \tau_n)$ pont



jellemzői: körívháromszög, ha $\vec{n}$ fősíokban van $\rightarrow N$ félkörön, ha $\vec{n}$ tetszőleges $\rightarrow N$ a háromszögben

3. Feszültségi állapot

Egy főkör, például $\vec{e}_1; \vec{e}_2$ síkja $\vec{e}_3$ -ból nézve:
A feszültségi tenzor a főteengelyek KR-ében:

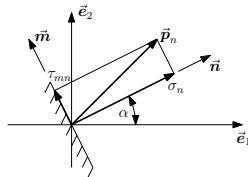
$$\left[\underline{\underline{T}} \right]_{(1,2,3)} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Ábra alapján:

$$\vec{n} = \cos \alpha \vec{e}_1 + \sin \alpha \vec{e}_2$$

$$\vec{p}_n = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{n} = \sigma_1 \cos \alpha \vec{e}_1 + \sigma_2 \sin \alpha \vec{e}_2$$

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{p}_n = \sigma_1 \underbrace{\cos^2 \alpha}_{\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)} + \sigma_2 \underbrace{\sin^2 \alpha}_{\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)}$$



3. Feszültségi állapot

Átalakítva:

$$\sigma_n = \underbrace{\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}}_{\sigma_0} + \underbrace{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)}_R \cos 2\alpha$$

$$\sigma_n = \sigma_0 + R \cos 2\alpha$$

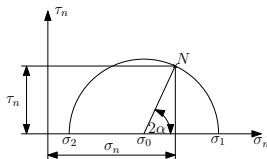
$$\vec{m} = \sin \alpha \vec{e}_1 - \cos \alpha \vec{e}_2$$

$$\tau_n = |\vec{\tau}_n| = |\tau_{mn}| = |\vec{m} \cdot \vec{p}_n| = |\sigma_1 \sin \alpha \cos \alpha - \sigma_2 \sin \alpha \cos \alpha|$$

$$\tau_n = |(\sigma_1 - \sigma_2) \underbrace{\sin \alpha \cos \alpha}_{\frac{1}{2} \sin 2\alpha}| = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} |\sin 2\alpha| = R |\sin 2\alpha|$$

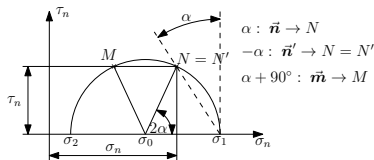
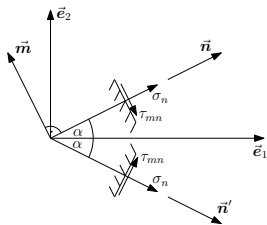
Négyzetre emelve és összeadva a σ_n -re és τ_n -re kapott egyenleteket:

$$(\sigma_n - \sigma_0)^2 + \tau_n^2 = R^2$$



3. Feszültségi állapot

Ábrázolás:



$\vec{\tau}_n$ a σ növekedésének irányába mutat

MN szakaszfelező merőlegese kimetszi a σ_0 -t, a kör középpontját.

Rudak szilárdságtana

Alapkísérletekből:

- $\underline{\underline{U}}, \underline{\underline{A}}, \underline{\underline{\Psi}}$ megfigyelés alapján
- $\underline{\underline{T}}$ egyensúlyi feltételből
- $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}(\underline{\underline{A}})$ próbatesten végzett kísérletből
- általánosítás

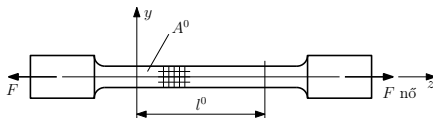
Ehhez pedig felhasználjuk a korábban már látott rúdkeresztmetszet igénybevételét:

$$\vec{F}_S = \int_A \vec{p}_z dA = -T_x \vec{e}_x - T_y \vec{e}_y + N \vec{e}_z$$

$$\vec{M}_S = \int_A \vec{R} \times \vec{p}_z dA = M_{hx} \vec{e}_x - M_{hy} \vec{e}_y + M_c \vec{e}_z$$

4. Húzott – nyomott rúd

Húzókísérlet:



Saint-Venant elv: a terhelésátadástól távol a feszültségállapot csak a terhelés nagyságától függ.

Feltevések: a rúd homogén, izotróp anyagból készült. Terhelés előtti jellemzők: l^0 , A^0 , ..., terhelés utáni jellemzők: l , A , ...

Alakváltozás:

$$\lambda_z = \frac{l}{l^0}$$

$$\varepsilon_z^0 = \frac{l - l^0}{l^0} = \lambda_z - 1 = \frac{\Delta l}{l^0}; \text{ mérnöki nyúlás}$$

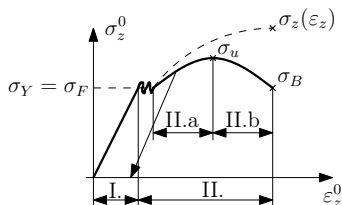
$$\varepsilon_z = \frac{l - l^0}{l} = 1 - \frac{1}{\lambda_z} = \frac{\Delta l}{l}; \text{ valódi nyúlás}$$

Normálfeszültség: egyenletes eloszlás feltételezésével:

$$\sigma_z^0 = \frac{F}{A^0}; \quad \sigma_z = \frac{F}{A}$$

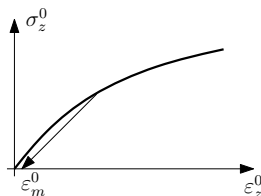
4. Húzott – nyomott rúd

Szakítódiagram:
pl.: szívós anyag



σ_u : szakító szilárdság
 σ_B : törési szilárdság
 $\sigma_Y = \sigma_F$: folyási szilárdság
I.: rugalmas alakváltozás
II.: képlékeny alakváltozás
II.a: keményedő szakasz
II.b: kontrakciós szakasz

pl.: alumínium

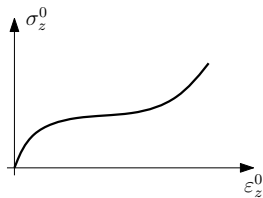


$$\epsilon_m^0 = 0,02\% \Rightarrow \sigma_F = R_{p0,2}$$

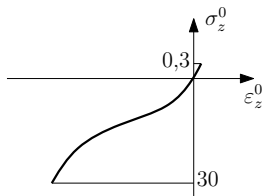
4. Húzott – nyomott rúd

Szakítódiagram:

pl.: gumi

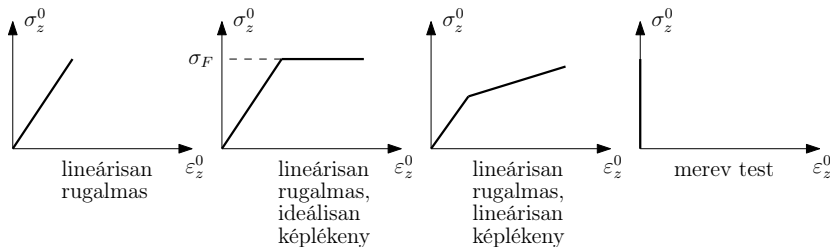


pl.: beton



4. Húzott – nyomott rúd

Anyagmodellek:



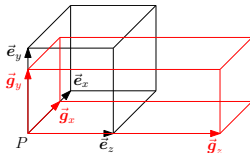
A lineárisan rugalmas anyagmodellel foglalkozunk: $\sigma_z = E\varepsilon_z$ – egyszerű Hooke-törvény.

Itt E az anyag ún. rugalmassági modulusa (pl. acélok esetében 190 és 210 GPa közötti érték, de nagyban függ a hőmérséklettől)

4. Húzott – nyomott rúd

Alakváltozási állapot:

tapasztalat: nyúlás – rövidülés van, szögtorzulás nincs



$$\vec{e}_x \rightarrow \vec{g}_x = \lambda_x \vec{e}_x = (1 + \varepsilon_x^0) \vec{e}_x$$

$$\vec{e}_y \rightarrow \vec{g}_y = \lambda_y \vec{e}_y = (1 + \varepsilon_y^0) \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_z \rightarrow \vec{g}_z = \lambda_z \vec{e}_z = (1 + \varepsilon_z^0) \vec{e}_z$$

Tehát az alakváltozási gradiens tenzor:

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon_x^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \varepsilon_y^0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \varepsilon_z^0 \end{bmatrix}$$

4. Húzott – nyomott rúd

Feltéve, hogy kis alakváltozás következik be: $\varepsilon^0 = \varepsilon$, így az elmozdulási gradiens tenzor:

$$\begin{bmatrix} \underline{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F} - \underline{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y^0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{sz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} \end{bmatrix}; \quad \underline{\Psi} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y^0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z^0 \end{bmatrix}$$

tapasztalat: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_K$ (keresztirányú fajlagos nyúlás)

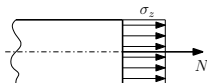
$$\varepsilon_K = -\nu \varepsilon_z$$

ahol ν az anyag ún. Poisson-tényezője

4. Húzott – nyomott rúd

Feszültségi állapot:

Mivel a palást terheletlen, ezért: $\vec{p}_x = \vec{p}_y = \vec{0}$. A keresztmetszet egyensúlya:



a keresztmetszet egyensúlya: $\vec{F}_S = \int_A \vec{p}_z dA = \vec{p}_z A = N \vec{e}_z$

$$\vec{p}_z = \frac{N}{A} \vec{e}_z \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_z = \sigma_z \vec{e}_z$$

Következmény:

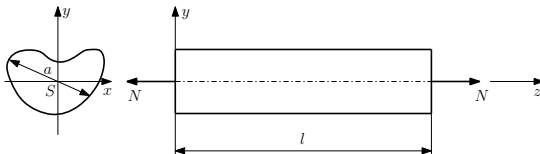
$$\sigma_z = \frac{N}{A}$$

illetve az egyszerű Hooke-törvény értelmében:

$$\sigma_z = E \varepsilon_z$$

4. Húzott – nyomott rúd

Általánosítás: általános keresztmetszet, homogén, prizmatikus rúd, $N = \text{állandó}$.



Alakváltozási jellemzők:

$$\varepsilon_k = \frac{\Delta a}{a} = \varepsilon_x = \varepsilon_y; \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l}; \quad \varepsilon_k = -\nu \varepsilon_z$$

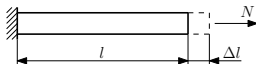
$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nu \varepsilon_z & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Feszültség:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= E \varepsilon_z \\ \sigma_z &= \frac{N}{A} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{\underline{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

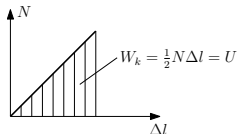
4. Húzott – nyomott rúd

Jellemző alakváltozás:



$$\Delta l = l \varepsilon_z = l \frac{\sigma_z}{E} = \frac{Nl}{AE}$$

Alakváltozási energia:



$$U = \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{AE}$$

4. Húzott – nyomott rúd

Méretezés – ellenőrzés:

Megengedett feszültség: $\sigma_{\text{meg}} > 0$

$$\sigma_{\text{meg}} = \frac{\sigma_{\text{jell}}}{n} = \frac{\text{tönkremenetelre jellemző feszültség}}{\text{biztonsági tényező (előírt)}}; \quad n \geq 1$$

ellenőrzés: meghatározzuk az ébredő maximális feszültséget:

$$|\sigma_z| = \frac{|N|}{A} = \begin{cases} \leq \sigma_{\text{meg}} \Rightarrow \text{megfelel} \\ > \sigma_{\text{meg}} \Rightarrow \text{nem felel meg} \end{cases}$$

$$n_t = \frac{\sigma_{\text{jell}}}{|\sigma_z|}; \quad n_t: \text{tényleges biztonsági tényező}$$

méretezés: alapformula

$$\frac{|N|}{A} \leq \sigma_{\text{meg}}$$

$$A \geq \frac{|N|}{\sigma_{\text{meg}}} = A_{\text{szüks}}$$

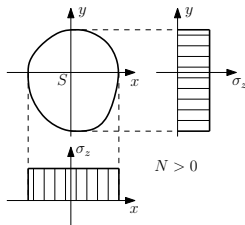
4. Húzott – nyomott rúd

Nyomás esetén:

$$\sigma_z, \varepsilon_z, \Delta l < 0$$

$$\varepsilon_k, \Delta a > 0$$

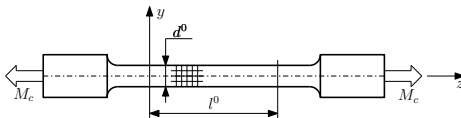
Feszültségeloszlás:



5. Tiszta csavarás

(Csak kör és körgyűrű keresztmetszetű rúd csavarását vizsgáljuk.)

Alapkísérlet:

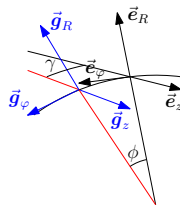
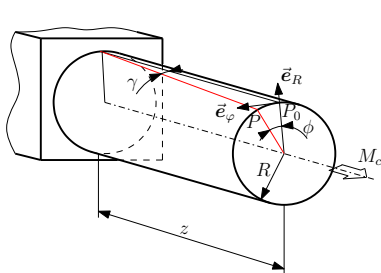


Tapasztalat:

- $l = l^0$, $d = d^0$
- a keresztmetszet sík marad és elfordul ϕ szöggel
- a keresztmetszet szögelfordulása: $\phi = \vartheta z$ ($\phi(0) = 0$). Itt ϑ az ún. fajlagos szögelfordulás (rad/m)
- az alkotókból csavarvonal lesz: γ az emelkedési szög

5. Tiszta csavarás

Általánosítás: tetszőleges R, z



$$\widehat{P^0 P} = R\phi = z \sin \gamma$$

Kis alakváltozások esetén $\sin \gamma \approx \gamma$ így

$$R\vartheta z = \gamma z \quad \Rightarrow \quad \gamma = R\vartheta$$

A kísérő triéder hengerkoordináta-rendszerben értelmezett

5. Tiszta csavarás

Alakváltozási gradiens:

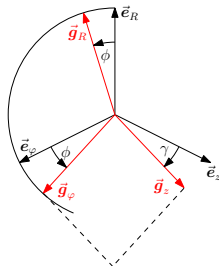
$$\vec{g}_R = \cos \phi \vec{e}_R + \sin \phi \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{g}_\varphi = -\sin \phi \vec{e}_R + \cos \phi \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{g}_z = \sin \gamma \vec{g}_\varphi + \cos \gamma \vec{e}_z$$

Így az alakváltozási gradiens HKR-ben:

$$\left[\underline{\underline{F}} \right]_{(R,\varphi,z)} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & -\sin \phi \sin \gamma \\ \sin \phi & \cos \phi & \cos \phi \sin \gamma \\ 0 & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix}$$



Kis alakváltozások esetén: $\phi \ll 1$, $\cos \phi \approx 1$, $\sin \phi \approx \phi$, $\gamma \ll 1$, $\cos \gamma \approx 1$, $\sin \gamma \approx \gamma$
 $\sin \phi \sin \gamma \approx \phi \gamma \ll \phi$, γ , $\cos \phi \sin \gamma \approx 1 \gamma = \gamma$ Így:

$$\left[\underline{\underline{F}} \right]_{(R,\varphi,z)} = \begin{bmatrix} 1 & -\phi & 0 \\ \phi & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\underline{\underline{U}} \right]_{(R,\varphi,z)} = \left[\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}} \right] = \begin{bmatrix} 0 & -\phi & 0 \\ \phi & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Tiszta csavarás

U additív felbontásából:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{A}} \\ (R, \varphi, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \underline{\underline{\Psi}} \\ (R, \varphi, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\phi & 0 \\ \phi & 0 & \frac{1}{2}\gamma \\ 0 & -\frac{1}{2}\gamma & 0 \end{bmatrix}$$

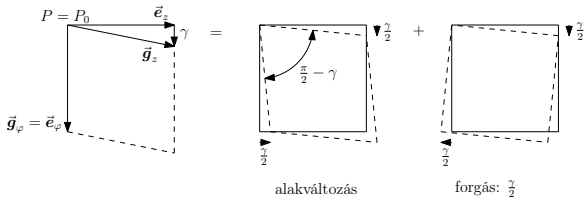
Következtetések:

$$\varepsilon_R = \varepsilon_\varphi = \varepsilon_z = 0,$$

$$\gamma_{\varphi z} = \gamma_{z\varphi} = \gamma = R\vartheta$$

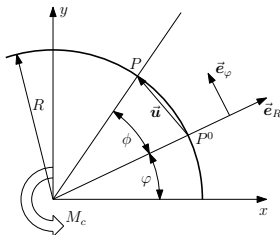
$$\underline{\underline{\psi}} = -\frac{1}{2}\gamma \underline{\underline{e}}_R + \phi \underline{\underline{e}}_z$$

$-\frac{1}{2}\gamma \underline{\underline{e}}_R$ forgatás szemléltetése $\underline{\underline{g}}_R$ irányában:



5. Tiszta csavarás

Elmozdulás:



$$\vec{u} = u_\phi \vec{e}_\phi \approx R\phi \underbrace{\vec{e}_\phi}_{\vec{e}_Z \times \vec{e}_R}$$

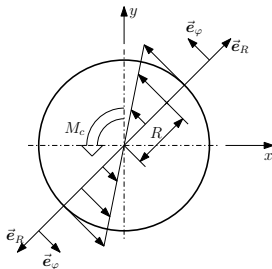
$$\vec{u} = R\vartheta z \vec{e}_Z \times \vec{e}_R = \vartheta z \vec{e}_Z \times R \vec{e}_R = \vartheta z \vec{e}_Z \times \vec{R}$$

5. Tiszta csavarás

Feszültségek: homogén, izotróp anyag, lineárisan rugalmas kísérletből:

$$\tau = G\gamma$$

ez az ún. csavarási Hooke-törvény, bármely irányra, ahol G az anyag ún. csúsztató rugalmassági modulusa (acélokra: ≈ 80000 MPa)



$$\tau_{\varphi z} = G\gamma_{\varphi z} = \tau_{z\varphi} = G\gamma_{z\varphi} \quad \Rightarrow \quad \tau_{\varphi z} = G\gamma = GR\vartheta$$

$$\begin{bmatrix} \underline{T} \end{bmatrix}_{(R,\varphi,z)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & 0 \end{bmatrix}$$

5. Tiszta csavarás

A keresztmetszet egyensúlya:

$$M_C = M_Z = \int_A R \tau_{\varphi Z} dA = G \vartheta \int_A R^2 dA = G \vartheta I_p$$

Ahol $I_p = \int_A R^2 dA$ a keresztmetszet ún. poláris másodrendű nyomatéka.

Például tömör kör keresztmetszet esetén:

$$I_p = \int_A R^2 \underbrace{dA}_{2\pi R dR} = 2\pi \int_0^{\frac{d}{2}} R^3 dR = 2\pi \left[\frac{R^4}{4} \right]_0^{\frac{d}{2}} = 2\pi \frac{d^4}{4 \cdot 16} = \frac{d^4 \pi}{32}$$

Körgyűrű keresztmetszetre (D külső és d belső átmérővel):

$$I_p = \frac{(D^4 - d^4) \pi}{32}$$

Következmény:

$$\vartheta = \frac{M_C}{I_p G}, \quad \tau_{\varphi Z} = \frac{M_C}{I_p} R$$

5. Tiszta csavarás

Maximális feszültség:

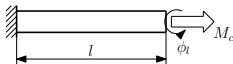
$$\tau_{\max} = \frac{|M_c|}{I_p} R_{\max} = \frac{M_c}{K_p}$$

itt K_p az ún. poláris keresztmetszeti tényező

$$K_p = \frac{I_p}{R_{\max}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{kör: } K_p = \frac{d^4 \pi}{32} \frac{2}{d} = \frac{d^3 \pi}{16} \\ \text{körgyűrű: } K_p = \frac{(D^4 - d^4) \pi}{32} \frac{2}{D} = \frac{(D^4 - d^4) \pi}{16D} \end{cases}$$

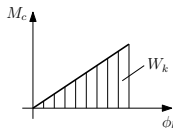
Jellemző alakváltozás: ϕ_l (a két szélső keresztmetszet egymáshoz viszonyított szögelfordulása)

$$\phi_l = \vartheta l = \frac{M_c l}{I_p G}$$



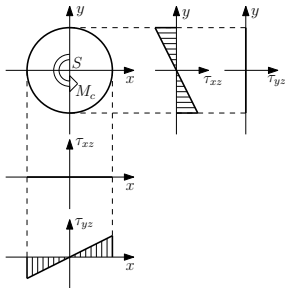
5. Tiszta csavarás

Alakváltozási energia:

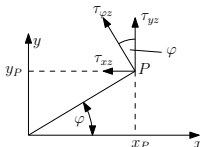


$$W_k = \frac{1}{2} M_c \phi_l \quad \Rightarrow \quad U = W_k = \frac{1}{2} \frac{M_c^2 l}{I_P G}$$

Feszültségeloszlás (x, y, z) KR-ben:



5. Tiszta csavarás



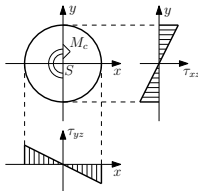
$$\tau_{xz} = -\tau_{\varphi z} \sin \varphi = -\frac{M_c}{I_p} R \sin \varphi = -\frac{M_c}{I_p} y$$

$$\tau_{yz} = \tau_{\varphi z} \cos \varphi = \frac{M_c}{I_p} R \cos \varphi = \frac{M_c}{I_p} x$$

$$\begin{bmatrix} \underline{T} \\ \underline{\underline{\quad}} \end{bmatrix}_{(R, \varphi, z)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \underline{T} \\ \underline{\underline{\quad}} \end{bmatrix}_{(x, y, z)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix}$$

5. Tiszta csavarás

$M_c < 0$ eset:



Méretezés – ellenőrzés:

$$\tau_{\text{meg}} = \frac{\tau_{\text{jell}}}{n}$$

Tényleges feszültség:

$$\tau_{\text{max}} = \frac{|M_c|}{K_p}$$

Ellenőrzés:

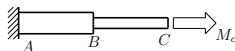
$$\tau_{\text{max}} = \begin{cases} \leq \tau_{\text{meg}} \Rightarrow \text{megfelel} \\ > \tau_{\text{meg}} \Rightarrow \text{nem felel meg} \end{cases}$$

Méretezés:

$$\frac{|M_c|}{K_p} \leq \tau_{\text{meg}} \quad \Rightarrow \quad K_p \geq \frac{|M_c|}{\tau_{\text{meg}}} = K_{p\text{szüks}} \rightarrow d_{\text{szüks}} \left(\frac{D}{d} \right)_{\text{szüks}}$$

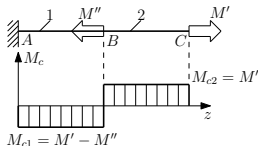
5. Tiszta csavarás

Általánosítás: lépcsős tengely:



$$\phi_C = \phi_{AB} + \phi_{BC} = \frac{M_c l_1}{I_{p1} G} + \frac{M_c l_2}{I_{p2} G}, \quad U = U_1 + U_2$$

M_c szakadáson:



$$A-B\text{-n: } \tau_{\varphi z} = \frac{M_{c1}}{I_p} R$$

$$B-C\text{-n: } \tau_{\varphi z} = \frac{M_{c2}}{I_p} R$$