

# Rugalmasságtan

IV. előadás  
készítette: Dr. Lengyel Ákos József

2020. április 25.

## 3.4. Vékonyfalú nyitott és zárt szelvények csavarása

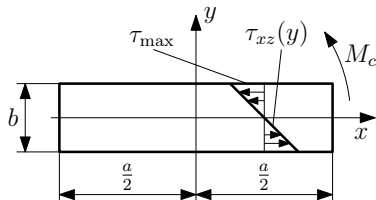
### Vékony téglalap keresztmetszet csavarása

Akkor tekintünk egy téglalap keresztmetszetet vékonyknak, ha  $b \ll a$ . Ez a gyakorlatban azt jelenti, hogy az  $\frac{a}{b}$  hányados értéke 5, vagy ettől nagyobb érték, ekkor már érvényesnek tekinthetjük a következőkben leírtakat. Feltételezzük, hogy a keresztmetszetben csak  $\tau_{xz}$  feszültség ébred, mely lineáris eloszlású. Természetesen elvileg ébred  $\tau_{yz}$  feszültség is a keresztmetszetben, de ennek mértéke a fent felírt  $\frac{a}{b}$  hányados esetén elhanyagolható mértékű a  $\tau_{xz}$ -hez képest. Így az ehhez kapcsolódó Prandtl-féle feszültségfüggvény feltételezett alakja a következő:

$$U \approx \left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2$$

Ez a függvény kielégíti a feszültségfüggvénnyel kapcsolatos egyik feltételi egyenletet, azaz

$$\Delta U = -2 \quad \vec{r} \in A$$



## 3.4. Vékonyfalú nyitott és zárt szelvények csavarása

A másik feltételt – hogy a feszültségfüggvény legyen zérus a peremen – azonban csak részben elégíti ki ez a függvény:

$$U = 0 \quad |y| = \frac{b}{2}$$

$$U \neq 0 \quad |x| = \frac{a}{2}$$

Ez utóbbi feltétel a  $\tau_{yz}$  feszültség miatt lenne fontos, de mivel ezt elhanyagoljuk, a további eredményekre így nincs befolyása ennek a nem teljesülő feltételnek. Írjuk fel az ébredő feszültséget a feszültségfüggvény segítségével

$$\tau_{xz} = G\vartheta \frac{\partial U}{\partial y} = -2G\vartheta y = -\frac{M_c}{I_c}(2y)$$

A keresztmetszet csavarási merevsége

$$I_c = 2 \int_A U dA = 2 \int_{x=-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{y=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left( \frac{b^2}{4} - y^2 \right) dx dy = 2 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[ \frac{b^2}{4}x - y^2x \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy =$$

## 3.4. Vékonyfalú nyitott és zárt szelvények csavarása

$$= 2 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[ \frac{ab^2}{4} - ay^2 \right] dy = 2 \left[ \frac{ab^2}{4} y - a \frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = 2 \left[ \frac{ab^3}{4} - \frac{ab^3}{12} \right] = \frac{ab^3}{3}$$

Ez alapján pedig a maximális nyírófeszültség

$$\tau_{\max} = |\tau_{xz}(y = b/2)| = 2 \frac{M_c}{I_c} y_{\max} = 2 \frac{3M_c}{ab^3} \frac{b}{2} = \frac{3M_c}{ab^2} = \frac{M_c}{I_c} b$$

## 3.4. Vékonyfalú nyitott és zárt szelvények csavarása

### Nyitott vékonyfalú szelvény csavarása

Először vizsgáljunk

meg egy olyan keresztmetszetet, mely több vékony téglalapról is összeállítható, ez látható az ábrán.

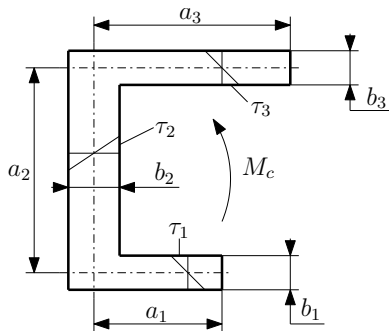
Felhasználva az előzőekben levezetett eredményeket, könnyen fel tudjuk írni ennek a keresztmetszetnek a csavarási merevségét és a szelvény különböző részeiben ébredő nyírófeszültségeket.

A lényeg, hogy a keresztmetszetet felbontjuk téglalapokra, melyek a mérete a középvonalának a hosszával egyezik meg. Tehát a csavarási merevség

$$I_c = \sum_{i=1}^3 \frac{a_i b_i^3}{3}$$

A nyírófeszültségek pedig

$$\tau_i = \frac{M_c}{I_c} b_i, \quad i = 1 \dots 3$$



## 3.4. Vékonyfalú nyitott és zárt szelvények csavarása

### Általános vékonyfalú nyitott keresztmetszet

Általános esetben a szelvény több síkidomból állítható össze, melyek középvonala nem feltétlenül kell, hogy egyenes legyen, illetve a falvastagság is változhat a szelvény hossza mentén, ahogy az az ábrán is látható. Ez alapján általánosíthatóak az előzőekben téglalpra levezetett összefüggések. Ehhez szükségünk van a szelvény középvonalának hosszára

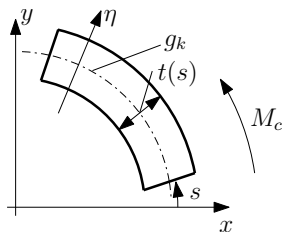
$$l = \int_{g_k} ds \gg \max |t(s)|$$

Ez alapján  
a csavarási merevség általánosan nyitott szelvényre

$$I_c = \frac{\int_{g_k} t^3(s) ds}{3}$$

A nyírófeszültség pedig

$$\tau_{sz} = \frac{M_c}{I_c} 2\eta \quad \Rightarrow \quad \tau_{\max} = \frac{M_c}{I_c} t_{\max}$$



## 3.4. Vékonyfalú nyitott és zárt szelvények csavarása

### Vékonyfalú zárt szelvények csavarása (Bredt-elmélet)

Vékonyfalú zárt szelvények

csavarásánál a Bredt-elméletet alkalmazzuk.

Az elmélet alapfeltevése, hogy a vékony fal miatt a külső és belső oldalon ébredő nyírófeszültség értékei közötti különbség elhanyagolható, vagyis feltevés, hogy a  $\tau_{sz}$  nyírófeszültség a  $t$  falvastagság mentén állandónak vehető.

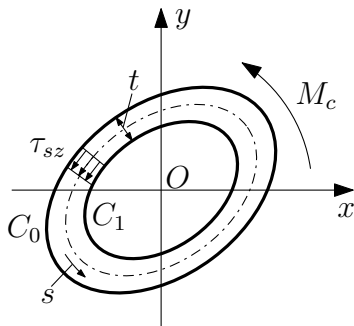
A Bredt elmélet levezetéseitől és az elméleti háttértől eltekintünk, csak megadjuk a csavarási merevség és a nyírófeszültség számítására szolgáló összefüggéseket:

$$\tau_{sz} = \frac{M_c}{2A_k t}$$

ahol  $A_k$  a keresztmetszetben a középvonalak által határolt terület,

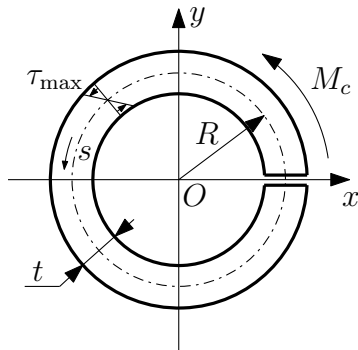
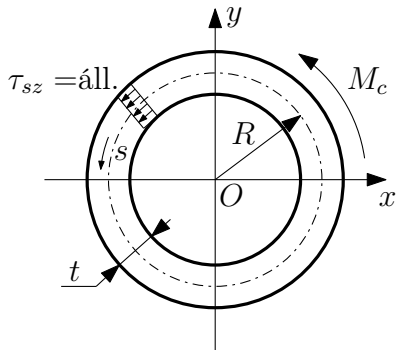
$$I_c = \frac{4A_k^2}{\oint_c \frac{ds}{t}}$$

itt  $c$  a zárt középvonalat jelöli. Ezeket a képleteket szokás Bredt-képleteknek is nevezni.



## 3.4. Vékonyfalú nyitott és zárt szelvények csavarása

**3.4.1. Példa:** Adottak az alábbi ábrán látható vékonyfalú nyitott és zárt, kör középvonalú szelvények, melyek csavaró igénybevételnek vannak kitéve. Határozzuk meg mindkét esetben a csavarási merevséget és a nyírófeszültség maximális értékét a falvastagság ( $t$ ) és a sugár ( $R$ ) függvényében, majd vessük össze a kapott eredményeket, ha  $t = \text{áll.}$  Melyik keresztmetszet csavarási merevsége nagyobb, és melyikben ébred nagyobb feszültség?





## 3.4. Vékonyfalú nyitott és zárt szelvények csavarása

**3.4.1. Példa folytatása:** Először tekintsük a nyitott keresztmetszetet. Ehhez a nyitott szelvényeknél alkalmazott elméletet fogjuk használni. A csavarási merevség a következő:

$$I_c^{ny} = \frac{\int g_k t^3 ds}{3} = \frac{t^3 \int ds}{3} = \frac{2R\pi t^3}{3}$$

Ez alapján pedig a nyírófeszültség maximális értéke:

$$\tau_{\max}^{ny} = \frac{M_c}{I_c^{ny}} t_{\max} = \frac{3M_c}{2R\pi t^3} t = \frac{3}{2} \frac{M_c}{R\pi t^2}$$

A zárt szelvényhez pedig a Bredt-képleteket fogjuk alkalmazni:

$$I_c^z = \frac{4A_k^2}{\oint_c \frac{ds}{t}} = \frac{4R^4 \pi^2}{\frac{1}{t} \oint_c ds} = \frac{4R^4 \pi^2 t}{2R\pi} = 2R^3 \pi t$$

$$\tau_{sz}^z = \frac{M_c}{2A_k t} = \frac{M_c}{2R^2 \pi t}$$

## 3.4. Vékonyfalú nyitott és zárt szelvények csavarása

**3.4.1. Példa folytatása:** Vessük össze a csavarási merevségeket, képezzük a zárt és a nyitott esetre vonatkozó merevségek hányadosát:

$$\frac{I_c^z}{I_c^{ny}} = \frac{2R^3 \pi t}{\frac{2R\pi t^3}{3}} = \frac{3R^2}{t^2} > 1$$

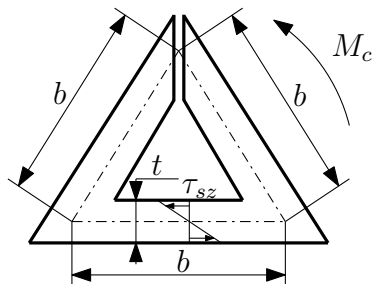
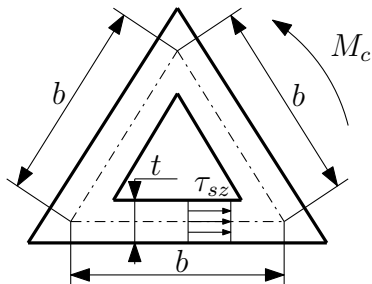
vagyis a zárt keresztmetszet csavarási merevsége a nagyobb. Most vizsgáljuk meg a hányadost a nyírófeszültségek esetében feltéve, hogy ugyanakkora csavarónyomaték működik mindkét keresztmetszeten:

$$\frac{\tau_{sz}^z}{\tau_{max}^{ny}} = \frac{\frac{M_c}{2R^2 \pi t}}{\frac{3}{2} \frac{M_c}{R\pi t^2}} = \frac{M_c}{2R^2 \pi t} \frac{2}{3} \frac{R\pi t^2}{M_c} = \frac{1}{3} \frac{t}{R} < 1$$

tehát ugyanannak a csavarónyomatéknak a hatására a nyitott keresztmetszetben ébred nagyobb nyírófeszültség. Ezekre az eredményekre számítottunk.

## 3.4. Vékonyfalú nyitott és zárt szelvények csavarása

**3.4.2. Példa:** Adott az ábrán látható nyitott és zárt vékonyfalú, egyenlő oldalú háromszög keresztmetszet. Határozzuk meg a két keresztmetszet csavarási merevségét és az azokban ébredő maximális nyírófeszültséget. Vessük össze a kapott eredményeket. Melyik keresztmetszet csavarási merevsége és maximális nyírófeszültsége nagyobb?



## 3.4. Vékonyfalú nyitott és zárt szelvények csavarása

**3.4.2. Példa folytatása:** Határozzuk meg a nyitott keresztmetszet csavarási merevségét:

$$I_c^{ny} = \frac{\int t^3 ds}{3} = \frac{3t^3 b}{3} = t^3 b$$

A nyitott keresztmetszetben ébredő nyírófeszültség maximuma:

$$\tau_{\max}^{ny} = \frac{M_c}{I_c^{ny}} t_{\max} = \frac{M_c}{t^3 b} t = \frac{M_c}{t^2 b}$$

Most vizsgáljuk meg a zárt keresztmetszetet:

$$I_c^z = \frac{4A_k^2}{\oint \frac{ds}{t}} = \frac{4 \left( \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} b^2 \right)^2}{\frac{3b}{t}} = \frac{b^3 t}{4}$$

$$\tau_{sz}^z = \frac{M_c}{2A_k t} = \frac{M_c}{\frac{\sqrt{3}}{2} b^2 t} = \frac{2M_c}{\sqrt{3} b^2 t}$$

## 3.4. Vékonyfalú nyitott és zárt szelvények csavarása

**3.4.2. Példa folytatása:** Most pedig az előző példához hasonlóan vessük össze az eredményeket:

$$\frac{I_c^z}{I_c^{ny}} = \frac{\frac{b^3 t}{4}}{t^3 b} = \frac{b^2}{4t^2} = \left(\frac{b}{2t}\right)^2 > 1$$

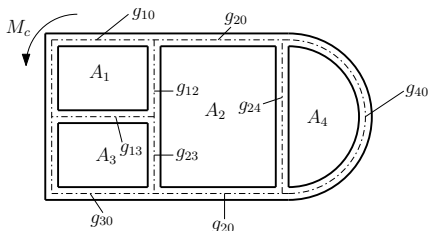
$$\frac{\tau_{sz}^z}{\tau_{max}^{ny}} = \frac{\frac{2M_c}{\sqrt{3}b^2 t}}{\frac{M_c}{t^2 b}} = \frac{2M_c}{\sqrt{3}b^2 t} \frac{t^2 b}{M_c} = \frac{2t}{\sqrt{3}b} < 1$$

Tehát ugyanazt a következtetést tudjuk levonni, mint a körgyűrűre, itt is a zárt keresztmetszet csavarási merevsége nagyobb, tehát abban ébred kisebb maximális nyírófeszültség ugyanannak a csavarónyomatéknak a hatására.

## 3.4. Vékonyfalú nyitott és zárt szelvények csavarása

### Többmezős vékonyfalú zárt szelvények csavarása:

Tekintsük az alábbi ábrán látható, több üreggel is rendelkező vékonyfalú zárt szelvényt. Ahogy a korábbiakban, most is a keresztmetszet középvonalát fogjuk felhasználni a számításhoz. A keresztmetszet középvonalai vagy a peremen találhatóak, vagy két szomszédos üreget választanak el egymástól, ennek megfelelően fogjuk őket eljelölni. A külső peremen körbefutó középgörbét is több részre osztjuk fel, annak megfelelően, hogy melyik üreget határolják. Így ezeknek a görbéknek a két indexe utal arra, hogy külső görbék (0 index), illetve hogy melyik üreget határolják (például a  $g_{10}$  külső peremgörbe, mely az 1-es üreget határolja). Azon középgörbék, melyek indexében két zérustól különböző szám szerepel, két üreget választanak el egymástól (például  $g_{12}$  az 1-es és 2-es üreg között található). A továbbiakban még egy jelölést fogunk használni a középgörbékre, mégpedig ha egyetlen indexe van a középgörbének, akkor az az ahhoz a számhoz tartozó üreget teljesen körbezáró középgörbét jelenti (például a  $g_1$ -es görbe az egyes üreget teljesen körbezáró középvonalak összessége). Tehát ha az egyes üreget kiválasztjuk, akkor az azt körülvevő görbe a következőképp is előállítható:



$$g_1 = g_{10} + g_{13} + g_{12}$$

## 3.4. Vékonyfalú nyitott és zárt szelvények csavarása

Eltekintünk a részletes elméleti leírástól. A feladat ebben az esetben is meghatározni a keresztmetszet csavarási merevségét és a szelvény különböző részeiben ébredő nyírófeszültségeket. Az elméleti háttér ebben az esetben is a Prandtl-féle feszültségfüggvényre épül, melynek további feltételeket kell kielégítenie üreges keresztmetszet esetén, illetve a Bredt-elméletet is alkalmazni kell. Ezek alapján a feszültségfüggvénynek a belső peremek mentén is konstansnak kell lennie, ám ebben az esetben ez már nem zérus értékű. Minden üreg esetében különböző konstans értékeket vehet fel a feszültségfüggvény, ezeket rendre  $C_1, C_2 \dots C_n$  jelöli, ahol  $n$  az üregek száma. Itt is érvényes, hogy  $C_0 = 0$  a külső peremen. A feladat első lépése, hogy ezeket az ismeretlen konstansokat meg kell határozni. Erre a következő általános egyenlet vezethető le:

$$C_i \oint_{g_i} \frac{ds}{t} - \sum_{i \neq j} C_j \int_{g_{ij}} \frac{ds}{t} = 2A_i$$

Itt  $A_i$  az  $i$ -edik üreget körülvevő középvonalak által alkotott síkidom területe, és  $i = 1 \dots n$ . Vagyis kapunk összesen  $n$  db egyenletet  $n$  db ismeretlen konstansra. Miután ezek a konstansok előálltak, következő lépés meghatározni a teljes keresztmetszet csavarási merevségét:

$$I_c = 2 \sum_{i=1}^n C_i A_i$$

## 3.4. Vékonyfalú nyitott és zárt szelvények csavarása

A csavarási merevség ismeretében pedig meghatározhatóak a nyírófeszültségek, melyek a Bredt-elmélet értelmében a falvastagság mentén állandó értékűek. A perem mentén ébredő nyírófeszültségek:

$$\tau_i = \tau_{i0} = \frac{M_c C_i}{I_c t_{i0}}$$

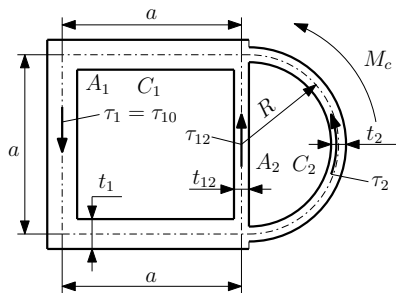
illetve a belső határoló szelvényrészekben ébredő feszültségek:

$$\tau_{ij} = \frac{M_c C_i - C_j}{I_c t_{ij}}$$



## 3.4. Vékonyfalú nyitott és zárt szelvények csavarása

**3.4.3. Példa:** Adott az alábbi ábrán látható többmezős vékonyfalú zárt szelvény, melyet csavarásnak teszünk ki. A keresztmetszet anyaga alumínium, melyre  $G = 26 \text{ GPa}$ , és a keresztmetszetben megengedett legnagyobb nyírófeszültség  $\tau_{meg} = 40 \text{ MPa}$ . Határozza meg az  $I_C$  csavarási merevség értékét, a rudat terhelő  $M_C^{\max}$  csavarónyomaték maximális értékét és ennél a csavarónyomatéknál fellépő  $\vartheta$  fajlagos szögelfordulást! A keresztmetszet méretei:  $a = 60 \text{ mm}$ ,  $R = 30 \text{ mm}$ ,  $t_1 = 4,5 \text{ mm}$ ,  $t_2 = 3 \text{ mm}$ ,  $t_{12} = 1,5 \text{ mm}$ .



## 3.4. Vékonyfalú nyitott és zárt szelvények csavarása

**3.4.3. Példa folytatása:** Tehát az első lépés, hogy meghatározzuk az ismeretlen  $C_i$  konstansokat, ahol  $i$  az üregek számát jelöli. Mivel két üreg van a keresztmetszetben, így két konstans kell meghatározni. Az általános egyenlet:

$$C_i \oint_{g_i} \frac{ds}{t} - \sum_{i \neq j} C_j \int_{g_{ij}} \frac{ds}{t} = 2A_i$$

Ebből erre a konkrét példára két egyenlet nyerhető, melyek a következők:

$$i = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 \oint_{g_1} \frac{ds}{t} - C_2 \int_{g_{12}} \frac{ds}{t} = 2A_1$$

$$i = 2 \quad \Rightarrow \quad C_2 \oint_{g_2} \frac{ds}{t} - C_1 \int_{g_{12}} \frac{ds}{t} = 2A_2$$

## 3.4. Vékonyfalú nyitott és zárt szelvények csavarása

**3.4.3. Példa folytatása:** Ezekben az egyenletekben az  $A_i$  a középvonalak által közrezárt területeket jelöli, ezek:

$$A_1 = a^2 = 60^2 \text{ mm}^2 = 3600 \text{ mm}^2, \quad A_2 = \frac{R^2 \pi}{2} = \frac{30^2 \pi}{2} \text{ mm}^2 = 450\pi \text{ mm}^2 \approx 1413,72 \text{ mm}^2$$

Az integrálok pedig:

$$\int_{g_{12}} \frac{ds}{t_{12}} = \frac{1}{t_{12}} \int_{g_{12}} ds = \frac{a}{t_{12}} = \frac{60 \text{ mm}}{1,5 \text{ mm}} = 40$$

$$\oint \frac{ds}{t} = \int_{g_{10}} \frac{ds}{t_1} + \int_{g_{12}} \frac{ds}{t_2} = \frac{3a}{t_1} + \frac{a}{t_{12}} = \frac{180 \text{ mm}}{4,5 \text{ mm}} + 40 = 80$$

$$\oint \frac{ds}{t} = \int_{g_{20}} \frac{ds}{t_2} + \int_{g_{12}} \frac{ds}{t_2} = \frac{R\pi}{t_2} + \frac{a}{t_{12}} = \frac{30\pi \text{ mm}}{3 \text{ mm}} + 40 \approx 71,42$$

## 3.4. Vékonyfalú nyitott és zárt szelvények csavarása

**3.4.3. Példa folytatása:** Ezeket az értékeket visszaírjuk a két egyenletbe, így:

$$80C_1 - 40C_2 = 7200 \text{ mm}^2$$

$$71,42C_2 - 40C_1 = 2827,44 \text{ mm}^2$$

Ezek alapján a két konstans:

$$C_1 = 152,499 \text{ mm}^2, \quad C_2 = 124,99 \text{ mm}^2$$

Ezen konstansok ismeretében meg tudjuk határozni a keresztmetszet csavarási merevségét:

$$I_c = 2 \sum_{i=1}^2 A_i C_i = 2 (3600 \cdot 152,499 + 1413,72 \cdot 124,99) \text{ mm}^4 = 1,451 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

## 3.4. Vékonyfalú nyitott és zárt szelvények csavarása

**3.4.3. Példa folytatása:** Ismerve a csavarási merevséget, fel tudjuk írni a csavarónyomaték függvényében a nyírófeszültségeket is:

$$\tau_1 = \frac{M_c}{I_c} \frac{C_1}{t_1} = \frac{M_c}{1,451 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} \frac{152,499 \text{ mm}^2}{4,5 \text{ mm}} = 2,335 \cdot 10^{-5} M_c$$

$$\tau_2 = \frac{M_c}{I_c} \frac{C_2}{t_2} = \frac{M_c}{1,451 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} \frac{124,99 \text{ mm}^2}{3 \text{ mm}} = 2,871 \cdot 10^{-5} M_c$$

$$\tau_{12} = \frac{M_c}{I_c} \frac{C_1 - C_2}{t_{12}} = \frac{M_c}{1,451 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} \frac{(152,499 - 124,99) \text{ mm}^2}{1,5 \text{ mm}} = 1,264 \cdot 10^{-5} M_c$$

A három feszültségben  $M_c$  értéke ugyanaz, hiszen ugyanannak a nyomatéknek van kitéve a teljes keresztmetszet, így az együtthatókból egyértelműen látszik, hogy a  $\tau_2$ -es feszültség lesz a legnagyobb, vagyis a megengedhető legnagyobb nyomaték értékét ebből nyerhetjük:

$$\tau_{\max} = \tau_2 = 2,871 \cdot 10^{-5} M_c^{\max} = 40 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \Rightarrow \quad M_c^{\max} = 1,393 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

## 3.4. Vékonyfalú nyitott és zárt szelvények csavarása

**3.4.3. Példa folytatása:** Ismerve a nyomatékot meghatározható a többi feszültség értéke is konkrétan:

$$\tau_1 = 2,335 \cdot 10^{-5} M_c^{\max} = 32,53 \text{ MPa}$$

$$\tau_{12} = 1,264 \cdot 10^{-5} M_c^{\max} = 17,61 \text{ MPa}$$

Minden eddig ismertett csavarási feladat esetén érvényes, hogy a csavarónyomaték a következő összefüggés alapján is számítható (így most is):

$$M_c = G\vartheta I_c$$

Ezt átrendezve pedig kapjuk a fajlagos szögelfordulást a maximális csavarónyomaték hatására:

$$\vartheta = \frac{M_c^{\max}}{G I_c} = \frac{1,393 \cdot 10^6 \text{ Nmm}}{26000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} 1,451 \cdot 10^6 \text{ mm}^4} = 3,693 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{mm}}$$

## 4. Energetikai elvek a mechanikában

## 4.1. A potenciális energia minimuma elv

Egy rugalmas test potenciális energiáját  $\Pi_P$ -vel jelöljük, és a következőképp számítható általános esetben

$$\Pi_P = U - W_k$$

ahol  $U$  a test alakváltozásából származó energia (röviden: alakváltozási energia), illetve  $W_k$  a külső erők munkája. Ezeket a következő módon tudjuk kiszámítani:

$$U = U(\vec{u}) = \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{T}}(\vec{u}) \cdot \underline{\underline{A}}(\vec{u}) dV$$

$$W_k = \int_V \vec{q} \cdot \vec{u} dV + \int_{A_p} \vec{p} \cdot \vec{u} dA$$

tehát a potenciális energia az elmozdulásmező ( $\vec{u}$ ) függvénye. Egy rugalmasságtani feladatban ennek az elmozdulásmezőnek a meghatározása a cél, amit a legtöbb esetben nem tudunk meghatározni. Ilyenkor azt a technikát alkalmazzuk, hogy felvesszünk egy próbafüggvényt vagy közelítő függvényt, amit beírunk a potenciális energiába. Ennek a függvénynek bizonyos feltételeket ki kell elégítenie.



## 4.1. A potenciális energia minimuma elv

Ezt a közelítő függvényt  $\vec{u}^*$ -gal jelöljük. Ennek a függvénynek ki kell elégítenie a kinematikai peremfeltételt ( $\vec{u} = \vec{u}_0$ ,  $\vec{r} \in A_U$ ) és folytonosan deriválhatónak kell lennie. Amelyik elmozdulásmező teljesíti ezeket a feltételeket, azt **kinematikailag lehetségesnek** nevezzük. A pontos és a kinematikailag lehetséges elmozdulásmező különbségét is definiáljuk

$$\delta \vec{u} = \vec{u}^* - \vec{u}$$

átrendezve

$$\vec{u}^* = \vec{u} + \delta \vec{u}$$

Ha az összes kinematikailag lehetséges  $\vec{u}^*$  vektort behelyettesítjük a potenciális energiába, amelyek között szerepel a feladat pontos megoldása is, akkor a potenciális energia függvénye a pontos megoldásnál eléri a minimumát (**a potenciális energia minimuma elv**)

$$\min \Pi_P(\vec{u}^*) = \Pi_P(\vec{u})$$

A kinematikailag lehetséges elmozdulásmező alapján az alakváltozási tenzort is a következő alakba tudjuk írni

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^* = \underline{\underline{\mathbf{A}}} + \delta \underline{\underline{\mathbf{A}}}$$

## 4.1. A potenciális energia minimuma elv

Ezt az alakváltozási tenzort beírva az anyagtörvénybe:

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}^* = \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}}^*$$

Így fel tudjuk írni a potenciális energiát bármely kinematikailag lehetséges elmozdulásmezővel:

$$\begin{aligned}\Pi_P(\underline{\underline{\mathbf{u}}}) &= \overset{*}{\Pi}_P = \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{\mathbf{T}}}^* \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}}^* dV - \int_V \underline{\underline{\mathbf{q}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{u}}} dV - \int_{A_p} \underline{\underline{\mathbf{p}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{u}}} dA = \\ &= \frac{1}{2} \int_V [(\underline{\underline{\mathbf{A}}} + \delta \underline{\underline{\mathbf{A}}}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot (\underline{\underline{\mathbf{A}}} + \delta \underline{\underline{\mathbf{A}}})] dV - \int_V (\underline{\underline{\mathbf{u}}} + \delta \underline{\underline{\mathbf{u}}}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}} dV - \int_{A_p} (\underline{\underline{\mathbf{u}}} + \delta \underline{\underline{\mathbf{u}}}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{p}}} dA =\end{aligned}$$

## 4.1. A potenciális energia minimuma elv

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} dV - \int_V \underline{\underline{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}} dV - \int_{A_p} \underline{\underline{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{p}}} dA}_{\Pi_P} + \\ &+ \underbrace{\int_V \delta \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} dV - \int_V \delta \underline{\underline{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}} dV - \int_{A_p} \delta \underline{\underline{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{p}}} dA}_{\delta \Pi_P} + \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2} \int_V \delta \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \delta \underline{\underline{\mathbf{A}}} dV}_{\delta^2 \Pi_P} = \\ &= \Pi_P + \delta \Pi_P + \delta^2 \Pi_P = \overset{*}{\Pi}_P \geq \Pi_P \end{aligned}$$

## 4.1. A potenciális energia minimuma elv

Most írjuk fel az egyensúlyi egyenletet

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \nabla + \underline{\underline{\mathbf{q}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}$$

Ezt az egyenletet szorozzuk meg  $\delta \underline{\underline{\mathbf{u}}}$ -val és integráljuk a  $V$  térfogaton

$$\int_V \delta \underline{\underline{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \nabla dV + \int_V \delta \underline{\underline{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}} dV = 0$$

Vizsgáljuk meg az első tagban az integrandust

$$\delta \underline{\underline{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \nabla = \left( \delta \underline{\underline{\mathbf{u}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} \right) \cdot \nabla - \left( \delta \underline{\underline{\mathbf{u}}} \circ \nabla \right) \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}$$

Itt  $\delta \underline{\underline{\mathbf{u}}} \circ \nabla = \delta \underline{\underline{\mathbf{U}}} = \delta \underline{\underline{\mathbf{A}}} + \delta \underline{\underline{\Psi}}$ , ez alapján

$$\left( \delta \underline{\underline{\mathbf{u}}} \circ \nabla \right) \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} = \delta \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} + \underbrace{\delta \underline{\underline{\Psi}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}}_0 = \delta \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}$$

## 4.1. A potenciális energia minimuma elv

Visszahelyettesítve az eredményeket kapjuk tehát

$$\begin{aligned} & \int_V (\delta \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}) \cdot \nabla dV - \int_V \delta \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} dV + \int_V \delta \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}} dV = \\ & = \int_{A=A_u+A_p} \delta \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}} dA - \int_V \delta \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} dV + \int_V \delta \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}} dV = \\ & = \int_{A_p} \delta \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{p}}} dA - \int_V \delta \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} dV + \int_V \delta \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}} dV = 0 \end{aligned}$$

Ezt az egyenletet még megszorozzuk  $-1$ -gyel, így

$$\int_V \delta \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} dV - \int_V \delta \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}} dV - \int_{A_p} \delta \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{p}}} dA = 0$$

Ezt az egyenletet nevezzük **a virtuális munka elvének**. Ha visszaidézzük a potenciális energia első variációját, az egyenlet bal oldala éppen ezt adja ( $\delta \Pi_P$ )

## 4.1. A potenciális energia minimuma elv

Tehát a virtuális munka elve alapján a potenciális energia első variációja zérus az egzakt megoldás esetén

$$\delta\Pi_P = 0$$

Ez azt jelenti, hogy a potenciális energiának tényleg szélsőértéke van a feladat egzakt megoldásánál. Azt pedig, hogy minimuma van, a második variáció alapján lehet kimondani, mert az mindig pozitív:

$$\delta^2\Pi_P > 0$$

## 4.2. A Ritz-módszer

A Ritz-módszer esetében a kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőt a következő alakban vesszük fel

$$\vec{u}^* = \sum_{i=1}^n c_i \vec{u}_i^*$$

ahol a  $\vec{u}_i^*$  ismert, általunk felvett elmozdulásmező függvények, míg a  $c_i$  ismeretlen konstansokat jelöl. Ha ezt az elmozdulásmezőt beírjuk a potenciális energia kifejezésébe, akkor a potenciális energia kizárólag az ismeretlen konstansok függvénye lesz

$$\Pi_P = \Pi_P(c_1, c_2, \dots, c_n)$$

A potenciális energia minimuma elv értelmében az első variációnak el kell tűnnie, vagyis

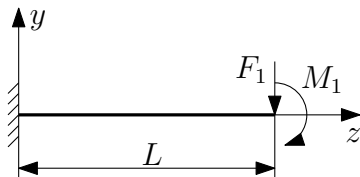
$$\delta \Pi_P = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Pi_P}{\partial c_i} \delta c_i = 0$$

Mivel  $\delta c_i$  tetszőleges lehet, ezért a potenciális energia konstansok szerinti deriváltja kell, hogy eltűnjön, vagyis

$$\frac{\partial \Pi_P}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi_P}{\partial c_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial \Pi_P}{\partial c_n} = 0$$

## 4.3. A Ritz-módszer és a potenciális energia minimumának alkalmazása

**4.3.1. Példa:** Adott az alábbi ábrán látható hajlított-nyírt tartó és terhelése. Keressük a rúd függőleges elmozdulás függvényét a következő alakban:  $v^* = c_1 z^2 + c_2 z^3$ . Kinematikailag lehetséges-e az elmozdulásmező? Határozzuk meg az ismeretlen konstansok értékét!



A rúd homogén izotróp anyagból készült, illetve prizmatikus, vagyis  $IE = \text{áll.}$   
A hajlított-nyírt tartók esetében alkalmazni fogjuk az Euler-Bernoulli rúdelméletet. Ennek az elméletnek a feltevései a következők:

- a rúd középvonala meggörbül, de nem nyúlik meg
- a keresztmetszetek merev lapként fordulnak el
- a keresztmetszetek merőlegesen maradnak a meggörbült középvonalra

Ezeknek a feltevéseknek a következő elmozdulásmező tesz eleget:  $u = 0$ ,  $v = v(z)$ ,  $w = -y \frac{dv}{dz} = -yv'$  (az egyszerűbb jelölés kedvéért a továbbiakban  $'$ -vel jelöljük a  $z$  szerinti deriválást). Tehát egyetlen függvény, az  $y$  irányú elmozdulás ismeretében a teljes elmozdulásmező meghatározható. Ezt keressük ebben a példában.



## 4.3. A Ritz-módszer és a potenciális energia minimumának alkalmazása

**4.3.1. Példa folytatása:** Alkalmazva a kinematikai egyenletet, kapjuk hogy

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -yv''$$

Minden más alakváltozási koordináta ebben az esetben zérus lesz. Ezt pedig beírva az egyszerű Hooke-törvénybe (hajlított nyírt tartó esetén ha az anyagtörvénybe beírjuk a fenti alakváltozási koordinátát, az egyszerű Hooke-törvényre jutunk) adódik

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = -Eyv''$$

Most írjuk fel a rúd potenciális energiáját. Az alakváltozási energia:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V \underline{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{A}} dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_z \varepsilon_z dV = \frac{1}{2} \int_V Ey^2 (v'')^2 dV = \frac{E}{2} \int_L \int_A y^2 (v'')^2 dA dz = \\ &= \frac{E}{2} \underbrace{\int_A y^2 dA}_I \int_L (v'')^2 dz = \frac{IE}{2} \int_L (v'')^2 dz \end{aligned}$$

## 4.3. A Ritz-módszer és a potenciális energia minimumának alkalmazása

**4.3.1. Példa folytatása:** A külső erők munkája pedig:

$$W_k = -F_1 v(L) + M_1 \psi(L) = -F_1 v(L) - M_1 v'(L)$$

Itt  $\psi(z) = -\frac{dv}{dz} = -v'$  (csak Euler-Bernoulli rúdelméletnél) a rúd szögelfordulás függvénye, megmondja, mely keresztmetszet mekkora szöggel fordult el a függőleges helyzethez képest. Tehát ebben a példában a rúd teljes potenciális energiája:

$$\Pi_P = \frac{IE}{2} \int_L (v'')^2 dz - F_1 v(L) - M_1 v'(L)$$

ha a pontos megoldásfüggvényt írjuk be. A mi esetünkben ezt nem ismerjük, helyette felvettünk egy  $\check{v}$  függvényt. Először is meg kell állapítanunk, hogy ez az elmozdulásmező kinematikailag lehetséges-e. A potenciális energia kifejezésében az elmozdulás függvény második deriváltja szerepel. A felvett  $\check{v}$  közelítő függvény folytonosan deriválható legalább kétszer, így ennek a feltételnek megfelel. Még teljesítenie kell a kinematikai peremfeltételeket is.

## 4.3. A Ritz-módszer és a potenciális energia minimumának alkalmazása

**4.3.1. Példa folytatása:** Erre a rúdra a következő kinematikai peremfeltételek írhatóak elő:

$$v(0) = 0$$

mivel a  $z = 0$  pontban a keresztmetszet nem mozdulhat el függőlegesen a befalazás miatt, illetve

$$v'(0) = 0$$

szintén a befalazás miatt a  $z = 0$  helyen a keresztmetszet nem is fordulhat el. A közelítő függvényre, annak első és második deriváltjára is szükségünk lesz, állítsuk ezeket elő.

$$\overset{*}{v} = c_1 z^2 + c_2 z^3, \quad \overset{*'}{v} = 2c_1 z + 3c_2 z^2, \quad \overset{*''}{v} = 2c_1 + 6c_2 z$$

A  $\overset{*}{v}$  és a  $\overset{*'}{v}$  függvénybe is beírva a  $z = 0$ -t teljesülnek a kinematikai peremfeltételek, tehát a felvett közelítő függvény kinematikailag lehetséges. Írjuk be a közelítő függvényt illetve annak megfelelő deriváltját a potenciális energiába:

$$\overset{*}{\Pi}_P = \frac{IE}{2} \int_L \left( \overset{*''}{v} \right)^2 dz - F_1 \overset{*}{v}(L) - M_1 \overset{*'}{v}(L)$$

## 4.3. A Ritz-módszer és a potenciális energia minimumának alkalmazása

### 4.3.1. Példa folytatása:

$$\bar{\Pi}_P^* = \frac{IE}{2} \int_0^L (4c_1^2 + 24c_1c_2z + 36c_2^2z^2) dz - F_1 (c_1L^2 + c_2L^3) - M_1 (2c_1L + 3c_2L^2)$$

Végezzük el az integrálást, majd írjuk vissza az eredményt a potenciális energiába

$$\int_0^L (4c_1^2 + 24c_1c_2z + 36c_2^2z^2) dz = \left[ 4c_1^2z + 24c_1c_2 \frac{z^2}{2} + 36c_2^2 \frac{z^3}{3} \right]_0^L = 4c_1^2L + 12c_1c_2L^2 + 12c_2^2L^3$$

Tehát a potenciális energia a  $c_1$  és  $c_2$  függvényében

$$\bar{\Pi}_P^* = IE (2c_1^2L + 6c_1c_2L^2 + 6c_2^2L^3) - F_1 (c_1L^2 + c_2L^3) - M_1 (2c_1L + 3c_2L^2)$$

## 4.3. A Ritz-módszer és a potenciális energia minimumának alkalmazása

**4.3.1. Példa folytatása:** Alkalmazva a Ritz-módszert

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi_P^*}{\partial c_1} &= 4IELc_1 + 6IEL^2c_2 - F_1L^2 - 2M_1L = 0 \\ \frac{\partial \Pi_P^*}{\partial c_2} &= 6IEL^2c_1 + 12IEL^3c_2 - F_1L^3 - 3M_1L^2 = 0 \end{aligned} \right\}$$

Így tehát kaptunk két egyenletet két ismeretlenre, melyekből a  $c_1$  és  $c_2$  konstansok értéke meghatározható:

$$c_1 = \frac{F_1L + M_1}{2IE}, \quad c_2 = -\frac{F_1}{6IE}$$

Vagyis a közelítő függvény

$$v^*(z) = \frac{F_1L + M_1}{2IE} z^2 - \frac{F_1}{6IE} z^3$$

## 4.3. A Ritz-módszer és a potenciális energia minimumának alkalmazása

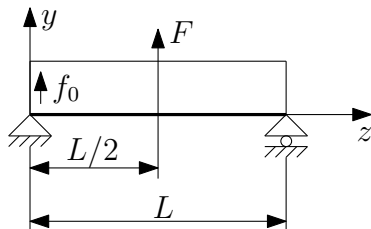
### 4.3.2. Példa: Adott

az alábbi ábrán látható hajlított-nyírt tartó és terhelése. Keressük a rúd függőleges elmozdulás függvényét a következő alakban:

$v^* = c \sin \frac{\pi}{L} z$ . Kinematikailag lehetséges-e az elmozdulásmező? Határozzuk meg az ismeretlen konstans értékét!

A rúd homogén izotróp anyagból készült, illetve prizmatikus ebben az esetben is, vagyis  $IE = \text{áll.}$  Most is alkalmazzuk az Euler-Bernoulli rúdelméletet. Először is ellenőrizzük, hogy a felvett közelítő függvény kinematikailag lehetséges-e. A  $\sin$  függvény folytonosan deriválható, tehát az egyik feltétel teljesült. Nézzük meg, erre a feladatra milyen peremfeltételi előírások tehetőek. A rúd függőleges elmozdulása mind a csuklónál, mind a görgőnél zérus, ezek a támaszok  $y$  irányban nem teszik lehetővé az elmozdulást, vagyis

$$v(0) = v(L) = 0$$



## 4.3. A Ritz-módszer és a potenciális energia minimumának alkalmazása

**4.3.2. Példa folytatása:** Írjuk be a  $z = 0$  illetve a  $z = L$  koordinátákat a  $\overset{*}{v}$  függvénybe:

$$\overset{*}{v}(0) = c \sin 0 = 0, \quad \overset{*}{v}(L) = c \sin \frac{\pi}{L} L = 0$$

tehát a kinematikai peremfeltételek is teljesülnek, így a felvett közelítő függvény kinematikailag lehetséges. Írjuk fel most is a rúdra a potenciális energiát. Az alakváltozási energia kifejezése ebben az esetben is ugyanaz, mint az előző példában

$$U = \frac{IE}{2} \int_L \left( \overset{*}{v}'' \right)^2 dz$$

Ugyanakkor a külső erők megváltoztak, így azok munkája is más lesz

$$\overset{*}{W} = -F \overset{*}{v} \left( \frac{L}{2} \right) - \int_0^L f_0 \overset{*}{v} dz$$

Így szükség lesz a közelítő függvény második deriváltjára, melyet az összetett függvények deriválási szabálya alapján kapunk

$$\overset{*}{v}'' = -c \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi}{L} z$$

## 4.3. A Ritz-módszer és a potenciális energia minimumának alkalmazása

**4.3.2. Példa folytatása:** Tehát a teljes potenciális energia

$$\Pi_P^* = \dot{U} + \dot{W} = \frac{IE}{2} \int_0^L c^2 \frac{\pi^4}{L^4} \sin^2 \frac{\pi}{L} z dz - \underbrace{Fc \sin \frac{\pi}{L} \frac{L}{2}}_1 - \int_0^L f_0 c \sin \frac{\pi}{L} z dz$$

Számítsuk ki az első integrált. Ehhez alkalmazzuk a linearizáló formulát, mely szerint

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad \Rightarrow \quad \sin^2 \frac{\pi}{L} z = \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{L} z \right)$$

így

$$\int_0^L c^2 \frac{\pi^4}{L^4} \sin^2 \frac{\pi}{L} z dz = c^2 \frac{\pi^4}{L^4} \frac{1}{2} \int_0^L \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{L} z \right) dz = c^2 \frac{\pi^4}{L^4} \frac{1}{2} \left[ z - \frac{L}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{L} z \right]_0^L = c^2 \frac{\pi^4}{L^4} \frac{L}{2}$$



## 4.3. A Ritz-módszer és a potenciális energia minimumának alkalmazása

4.3.2. Példa folytatása: A másik integrál

$$\int_0^L f_0 c \sin \frac{\pi}{L} z dz = f_0 c \left[ -\frac{L}{\pi} \cos \frac{\pi}{L} z \right]_0^L = 2f_0 c \frac{L}{\pi}$$

tehát erre a feladatra a  $\Pi_P^*$  mint a  $c$  konstans függvénye

$$\Pi_P^* = \frac{IE\pi^4}{4L^3} c^2 - Fc - 2f_0 c \frac{L}{\pi}$$

Ismét alkalmazva a Ritz-módszert és a potenciális energia minimuma elvét

$$\frac{\partial \Pi_P^*}{\partial c} = \frac{IE\pi^4}{2L^3} c - F - 2f_0 \frac{L}{\pi} = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{2L^3}{IE\pi^4} \left( F + \frac{2f_0 L}{\pi} \right)$$

Így tehát ennek a feladatnak a közelítő megoldása:

$$v^* = \frac{2L^3}{IE\pi^4} \left( F + \frac{2f_0 L}{\pi} \right) \sin \frac{\pi}{L} z$$