

# Mechanika

VI. előadás

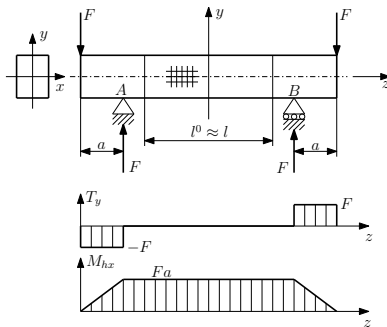
2019. április 30.

## 6. Tiszta hajlítás

Igénybevétel csak hajlítónyomaték ( $M_h$ )

**Egyenes hajlítás:**  $M_h = M_{hx}$  és  $x$  vagy  $y$  szimmetriatengelye a keresztmetszetnek.

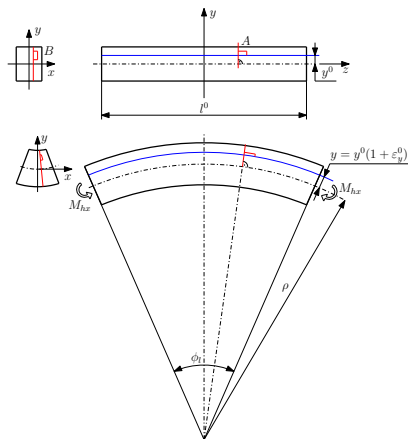
Alapkísélet:



## 6. Tiszta hajlítás

A kísérlet tárgya:  
a rúd tisztán hajlított  $l$  hosszúságú darabja:  
Kísérleti tapasztalatok:

- meggömbül a rúd
- $l = \rho \phi_l$  a meggömbült rúd középvonala, melynek hossza nem változik
- a keresztmetszet torzul, de sík marad és merőleges marad a meggömbült középvonalra
- az  $A$  és  $B$  elemi keresztmetszet darabok alakváltozása az ábrán látható
- nincs  $\gamma$  szögtorzulás



## 6. Tiszta hajlítás

Bázisvektorok deformációja:

$$y > 0 \Rightarrow \varepsilon_z > 0, \varepsilon_x = \varepsilon_y < 0$$

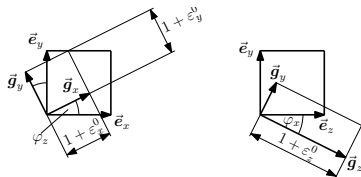
itt a hosszanti szál nyúlik,

$$y < 0 \Rightarrow \varepsilon_z < 0, \varepsilon_x = \varepsilon_y > 0$$

itt a hosszanti szál zsugorodik

Kis forgás és alakváltozás:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_x, \varphi_y \ll 1 \\ y \approx y^0, \varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_z^0 \ll 1 \end{array} \right\} \varepsilon^0 \approx \varepsilon$$



## 6. Tiszta hajlítás

Tehát az alakváltozási tenzor:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Tapasztalat:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_k = -\nu\varepsilon_z$$

$$\varepsilon_z = \frac{l - l^0}{l^0} = \frac{(\rho + y)\phi_l - \rho\phi_l}{\rho\phi_l} = \frac{y}{\rho}$$

vagy

$$\varepsilon_z = \kappa y; \quad \text{itt: } \kappa = \frac{1}{\rho} \text{ a görbület}$$

tehát

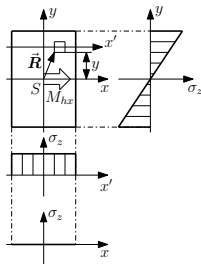
$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}(y)$$

Feszültségi állapot:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = \frac{E}{\rho}y \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{T}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

## 6. Tiszta hajlítás

A feszültségeloszlás:



$$\vec{p}_z = \sigma_z \vec{e}_z = \frac{E}{\rho} y \vec{e}_z$$

$$\vec{R} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y$$

$$\vec{F}_S = \int_A \vec{p}_z dA = \frac{E}{\rho} \underbrace{\int_A y dA}_{0 \text{ mert } O=S} = \vec{0}$$

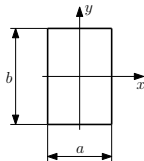
$$\vec{M}_S = \int_A \vec{R} \times \vec{p}_z dA = \int_A (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y) \times \left( \frac{E}{\rho} y \right) dA =$$

$$= -\frac{E}{\rho} \int_A xy dA \vec{e}_y + \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA \vec{e}_x$$

Itt  $I_x = \int_A y^2 dA$  az ún.  $x$  tengelyre számított másodrendű (tehetetlenségi) nyomaték,  $I_{xy} = \int_A xy dA$  pedig az  $xy$  tengelypárra számított másodrendű nyomaték.

## 6. Tiszta hajlítás

Pl.: téglalap keresztmetszet



$$I_x = \int_A y^2 dA = a \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy = \left[ a \frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} =$$

$$a \frac{b^3}{3 \cdot 8} \cdot 2 \rightarrow I_x = \frac{ab^3}{12}$$

hasonlóan:  $I_y = \frac{ba^3}{12}$

$I_{xy} = \int_A xy dA = 0$ , mert van szimmetriatengely.

Most  $I_{xy} = 0$ , így

$$\vec{M}_S = -\frac{E}{\rho} I_{xy} \vec{e}_y + \frac{E}{\rho} I_x \vec{e}_x \Rightarrow \vec{M}_S = \frac{E}{\rho} I_x \vec{e}_x = M_{hx} \vec{e}_x$$

Következmény:

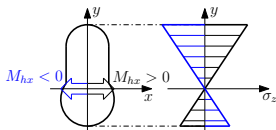
$$M_{hx} = \frac{E}{\rho} I_x$$

## 6. Tiszta hajlítás

Így a feszültség:

$$\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y$$

Az ún. zérusvonal:  $\sigma_z = 0$  vonal  $y = 0$ -nál. A zérusvonal párhuzamos  $M_{hx}$ -szel (a hajlítás tengelyével). Ábrázolás:



Maximális feszültség:

$$\sigma_{z\max} = \sigma_{\max} = \frac{|M_{hx}|}{I_x} y_{\max} = \frac{|M_{hx}|}{K_x}$$

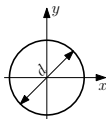
$K_x = \frac{I_x}{y_{\max}}$  az  $x$  tengelyre számított keresztmetszeti tényező. Például téglalpra:

$$K_x = \frac{ab^3}{12} \frac{2}{b} = \frac{ab^2}{6}$$



## 6. Tiszta hajlítás

Pl.: kör keresztmetszet



Csavarásnál már láttuk, hogy

$$I_p = \int_A R^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \frac{d^4 \pi}{32}$$

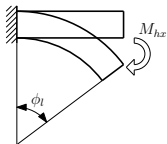
$$\left. \begin{array}{l} I_x = \int_A y^2 dA \\ I_y = \int_A x^2 dA \end{array} \right\} \Rightarrow I_x = I_y$$

$$I_p = I_x + I_y \Rightarrow I_x = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{d^4 \pi}{64}$$

$$K_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{I_x}{d/2} = \frac{d^4 \pi}{64} \frac{2}{d} = \frac{d^3 \pi}{32}$$

## 6. Tiszta hajlítás

Jellemző alakváltozás

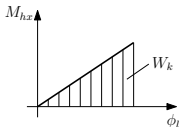


$$\phi_l = \frac{l}{\rho} = \frac{M_{hx} l}{I_x E}$$

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M_{hx}}{I_x E}$$

## 6. Tiszta hajlítás

Alakváltozási energia:



$$U = W_k = \frac{1}{2} M_{hx} \phi_l = \frac{1}{2} \frac{M_{hx}^2 l}{I_x E}$$

Méretezés – ellenőrzés:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{hx}|}{K_x}$$

Ellenőrzés:

$$\sigma_{\text{meg}} = \frac{\sigma_{\text{jell}}}{n}$$

Ha  $\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{meg}}$  megfelel; ha  $\sigma_{\max} > \sigma_{\text{meg}}$  nem felel meg.

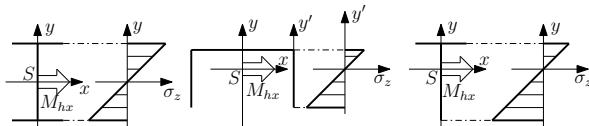
Méretezés:

$$\frac{|M_{hx}|}{K_x} \leq \sigma_{\text{meg}} \Rightarrow K_x \geq \frac{|M_{hx}|}{\sigma_{\text{meg}}} = K_{x\text{szüks}}$$

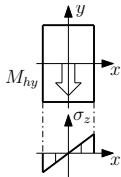
## 6. Tiszta hajlítás

Általánosítás:

– szimmetria tengely:



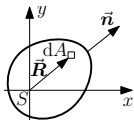
–  $y$  tengely irányú hajlító nyomaték:  $M_{hy}$



$$\sigma_z = \frac{M_{hy}}{I_y} x$$

## 6. Tiszta hajlítás

Tehetetlenségi jellemzők:



S pontra a statika nyomaték zérus:

$$\int_A x dA = \int_A y dA = 0$$

tengelyre:

$$I_x = \int_A y^2 dA; I_y = \int_A x^2 dA$$

tengelypárra:

$$I_{xy} = \int_A xy dA$$

tehetetlenségi vektor és tenzor definíció szerint:

$$\vec{I}_n = \int_A \vec{R} \times (\vec{n} \times \vec{R}) dA = \underline{I}_S \cdot \vec{n}$$

A kifejtési tétel:  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

## 6. Tiszta hajlítás

Legyen például  $\vec{n} = \vec{e}_x$

$$\begin{aligned}\vec{I}_x &= \int_A \vec{R} \times (\vec{e}_x \times \vec{R}) dA = \int_A [R^2 \vec{e}_x - (\vec{R} \cdot \vec{e}_x) \vec{R}] dA = \int_A [(x^2 + y^2) \vec{e}_x - x(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y)] dA = \\ &= \underbrace{\int_A y^2 dA}_{I_x} \vec{e}_x - \underbrace{\int_A xy dA}_{I_{xy}} \vec{e}_y \\ \vec{I}_x &= \underline{I}_S \cdot \vec{e}_x = I_x \vec{e}_x - I_{xy} \vec{e}_y\end{aligned}$$

Legyen például  $\vec{n} = \vec{e}_y$

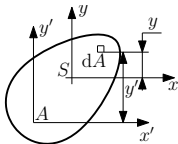
$$\begin{aligned}\vec{I}_y &= \int_A \vec{R} \times (\vec{e}_y \times \vec{R}) dA = \int_A [R^2 \vec{e}_y - (\vec{R} \cdot \vec{e}_y) \vec{R}] dA = \int_A [(x^2 + y^2) \vec{e}_y - y(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y)] dA = \\ &= -\underbrace{\int_A xy dA}_{I_{xy}} \vec{e}_x + \underbrace{\int_A x^2 dA}_{I_y} \vec{e}_y \\ \vec{I}_y &= \underline{I}_S \cdot \vec{e}_y = -I_{xy} \vec{e}_x + I_y \vec{e}_y\end{aligned}$$

## 6. Tiszta hajlítás

Így a súlyponti tehetetlenségi tenzor:

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_{yy} \end{bmatrix}$$

Steiner-tétel:



$$\begin{aligned} I_{x'} &= \int_A y'^2 dA = \int_A (y + y_{SA})^2 dA = \\ &= \int_A y^2 dA + 2y_{SA} \underbrace{\int_A y dA}_0 + y_{SA}^2 A \end{aligned}$$

$$\text{Tehát } I_{x'} = I_x + y_{SA}^2 A$$

$$\text{Hasonlóan: } I_{y'} = I_y + x_{SA}^2 A$$

$$\begin{aligned} I_{x'y'} &= \int_A x' y' dA = \int_A (x + x_{SA})(y + y_{SA}) dA = \int_A xy dA + x_{SA} \int_A y dA + y_{SA} \int_A x dA + x_{SA} y_{SA} \int_A dA = \\ &= I_{xy} + x_{SA} y_{SA} A \end{aligned}$$

## 6. Tiszta hajlítás

$\underline{I}_S$  főtengeley-problémája:

$$\underline{I}_S \cdot \vec{n} = \lambda \vec{n}; \quad \lambda; \vec{n} = ?$$

$$\underline{I}_S \cdot \vec{n} - \lambda \underbrace{\vec{n}}_{\underline{1} \cdot \vec{n}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad (\underline{I}_S - \lambda \underline{1}) \cdot \vec{n} = \vec{0}$$

Kifejtve:

$$\begin{bmatrix} I_x - \lambda & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Triviálislól eltérő megoldás:

$$\det(\underline{I}_S - \lambda \underline{1}) = (I_x - \lambda)(I_y - \lambda) - I_{xy}^2 = 0$$

Kifejtve nyerjük az ún. karakterisztikus egyenletet:

$$\lambda^2 - (I_x + I_y)\lambda + \underbrace{I_x I_y - I_{xy}^2}_{\det \underline{I}_S} = 0$$

Mindig van valós megoldása:  $\lambda_1 = I_1$ ;  $\lambda_2 = I_2 \neq I_1$



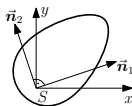
## 6. Tiszta hajlítás

Visszaírva számítható a főtegyelt kijelölő irányvektor két koordinátájának aránya:

$$\begin{bmatrix} I_x - I_1 & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y - I_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{n_{1x}}{n_{1y}} = \dots$$

Főirányok:

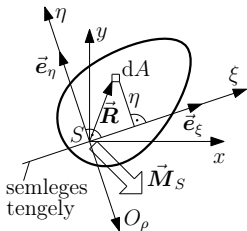
$$\underline{I}_S = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}_{(1,2)}$$



## 6. Tiszta hajlítás

Ferde hajlítás: tetszőleges keresztmetszet, tetszőleges  $\vec{M}_S$

Tapasztalat: van semleges tengely, ez a  $\xi$ , mely körül a keresztmetszet elfordul



$$\vec{M}_S = M_x \vec{e}_x + M_y \vec{e}_y, \quad \vec{R} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y,$$

$$\vec{R} = \xi \vec{e}_\xi + \eta \vec{e}_\eta$$

$$\varepsilon_z = \frac{\eta}{\rho} \Rightarrow \sigma_z = E \varepsilon_z$$

$$\vec{p}_z = \sigma_z \vec{e}_z = \frac{E}{\rho} \eta \vec{e}_z = \frac{E}{\rho} \vec{e}_\xi \times \vec{R}$$

Mivel

$$\vec{e}_\xi \times \vec{R} = \vec{e}_\xi \times (\xi \vec{e}_\xi + \eta \vec{e}_\eta) = \eta \vec{e}_z$$

Így

$$\vec{M}_S = \int_A \vec{R} \times \vec{p}_z dA = \frac{E}{\rho} \int_A \vec{R} \times (\vec{e}_\xi \times \vec{R}) dA \Rightarrow \vec{M}_S = \frac{E}{\rho} \underbrace{I_{\xi=S}}_{\vec{I}_\xi = I_S \cdot \vec{e}_\xi} \cdot \vec{e}_\xi$$

## 6. Tiszta hajlítás

$\frac{E}{\rho} \vec{e}_\xi$  származtatása:  
Inverz tenzor:

$$\underline{I}_{=S}^{-1} \cdot \underline{I}_{=S} = \underline{1}$$

$$\underline{I}_{=S}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{I}_{=S}} \begin{bmatrix} I_y & I_{xy} \\ I_{xy} & I_x \end{bmatrix}, \quad \det \underline{I}_{=S} = I_x I_y - I_{xy}^2$$

$$\underline{I}_{=S}^{-1} \cdot \vec{M}_S = \frac{E}{\rho} \underbrace{\underline{I}_{=S}^{-1} \cdot \underline{I}_{=S}}_{\underline{1}} \cdot \vec{e}_\xi = \frac{E}{\rho} \vec{e}_\xi$$

Így

$$\vec{p}_z = \underline{I}_{=S}^{-1} \cdot \vec{M}_S \times \vec{R}$$

$$\begin{aligned} \vec{p}_z &= \frac{1}{\det \underline{I}_{=S}} [(I_y M_x + I_{xy} M_y) \vec{e}_x + (I_{xy} M_x + I_x M_y) \vec{e}_y] \times \vec{R} = \\ &= \left[ \frac{I_y M_x + I_{xy} M_y}{\det \underline{I}_{=S}} y - \frac{I_{xy} M_x + I_x M_y}{\det \underline{I}_{=S}} x \right] \vec{e}_z \end{aligned}$$

## 6. Tiszta hajlítás

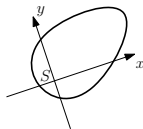
Következmény: tetszőleges keresztmetszetet tetszőleges hajlítónyomatékkal terhelve a következő általános képletet kapjuk a feszültségre:

$$\sigma_z = \frac{I_y M_x + I_{xy} M_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} y - \frac{I_{xy} M_x + I_x M_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} x$$

Legyen  $x$  és  $y$  a főtéglaxek koordináta-rendszere:

$$I_{xy} = \int_A xy dA = 0, \quad [I_{=S}] = \begin{bmatrix} I_x & 0 \\ 0 & I_y \end{bmatrix}$$

$$\det I_{=S} = I_x I_y$$

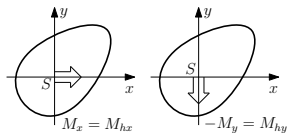


Ezeket visszaírva az általános feszültség képletébe kapjuk:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

## 6. Tiszta hajlítás

Szuperpozíció:



$$\sigma'_z = \frac{M_x}{I_x} y = \frac{M_{hx}}{I_x} y$$

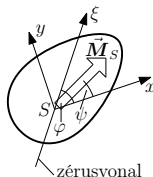
$$\sigma''_z = -\frac{M_y}{I_y} x = \frac{M_{hy}}{I_y} x$$

Így

$$\sigma_z = \sigma'_z + \sigma''_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hy}}{I_y} x$$

## 6. Tiszta hajlítás

Zérusvonal:  $\sigma_z = 0$



$$y = -\frac{M_{hy} I_x}{M_{hx} I_y} x = \underbrace{\frac{M_y I_x}{M_x I_y}}_{\tan \varphi} x = \tan \varphi x$$

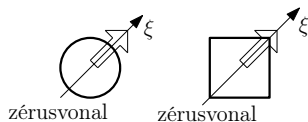
Egyenes hajlítás:  $\vec{M}_S$  párhuzamos a keresztmetszet valamelyik főtengelyével.

Ferde hajlítás:  $\vec{M}_S$  nem párhuzamos a keresztmetszet egyik főtengelyével sem.

## 6. Tiszta hajlítás

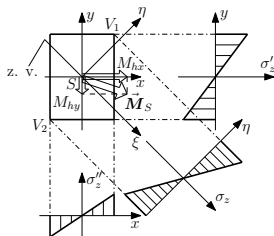
$$\tan \varphi = \frac{M_y}{M_x} \frac{I_x}{I_y} = \tan \psi \frac{I_x}{I_y}$$

Speciális eset:  $\varphi = \psi$ , ha  $I_x = I_y$ . Pl. kör vagy négyzet keresztmetszet:



## 6. Tiszta hajlítás

Téglalap keresztmetszetnél:



$$\sigma'_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y$$

$$\sigma''_z = \frac{M_{hy}}{I_y} x$$

$$\sigma_z = \sigma'_z + \sigma''_z = \frac{E}{\rho} \eta$$

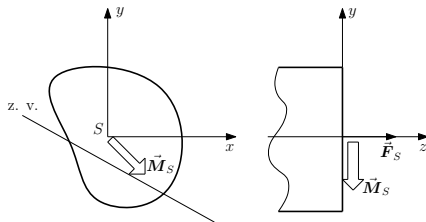
$$\sigma_{\max} = \sigma_z(V_1) = |\sigma_z(V_2)| = \frac{M_{hx}}{K_x} + \frac{M_{hy}}{K_y}$$



## 7. Összetett igénybevételek

Továbbra is kis alakváltozásokkal foglalkozunk és érvényesnek tekintjük a szuperpozíció elvét.

**7.1 Húzás és hajlítás:** először egytengelyű feszültségállapotot létrehozó igénybevétel kombinációkkal foglalkozunk



A súlypontba redukált vektorkettős:

$$\vec{F}_S = N\vec{e}_z; \quad \vec{M}_S = M_{hx}\vec{e}_x - M_{hy}\vec{e}_y$$

$x$  és  $y$  legyenek tehetetlenségi főténgelyek ( $I_{xy} = \int_A xy dA = 0$ ), így a feszültség:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x}y + \frac{M_{hy}}{I_y}x$$

## 7. Összetett igénybevételek

zérusvonal:

$$\sigma_z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{I_x}{M_{hx}} \left( \frac{N}{A} + \frac{M_{hy}}{I_y} x \right)$$

maximális feszültség (veszélyes pont a zérusvonalától legtávolabb eső pont):

$$\sigma_{\max} = \sigma_z = \frac{|N|}{A} + \frac{|M_{hx}|}{K_x} + \frac{|M_{hy}|}{K_y}$$

ellenőrzés:

$$\sigma_{\text{meg}} \geq \sigma_{\max}$$

méretezés több lépésben:

- 1 csak  $M_{hx}$ -re és  $M_{hy}$ -ra méretezünk  $\Rightarrow$  keresztmetszet mérete
- 2 ezzel a mérettel ellenőrzés minden igénybevételre ( $N + M_{hx} + M_{hy}$ -ra)

alakváltozások:

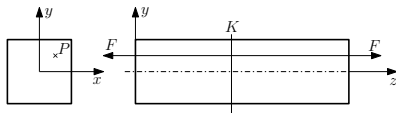
$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}; \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_k = -\nu \varepsilon_z$$

alakváltozási energia:

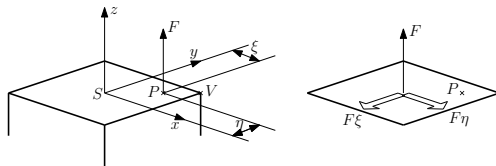
$$U = \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{AE} + \frac{1}{2} \frac{M_{hx}^2 l}{I_x E} + \frac{1}{2} \frac{M_{hy}^2 l}{I_y E}$$

# 7. Összetett igénybevételek

Speciális eset: excentrikus húzás/nyomás



$F$  támadáspontja:  $P(\xi, \eta)$ , így a keresztmetszet igénybevétele:



$$N = F; \quad M_{hx} = \eta F; \quad M_{hy} = \xi F$$

feszültség:

$$\sigma_z = \frac{F}{A} + \frac{\eta F}{I_x} y + \frac{\xi F}{I_y} x$$

# 7. Összetett igénybevételek

zérusvonal:

$$\sigma_z = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{I_x}{\eta} \left( \frac{1}{A} + \frac{\xi}{I_y} x \right)$$

maximális feszültség a veszélyes pontban (ábrán:  $V$ )

Speciális eset:  $\xi = 0$ , vagyis az erő támadáspontja épp az  $y$  tengelyen van:

a zérusvonal

ekkor egyszerűbb, melybe ha a téglalpra érvényes képleteket behelyettesítjük:

$$y = -\frac{I_x}{\eta A} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{ab^3}{12\eta ab} = -\frac{b^2}{12\eta}$$

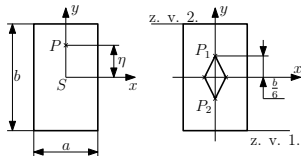
ha

a zérusvonal épp az alsó oldalélre esik, akkor

$y = -\frac{b}{2}$  a zérusvonal egyenlete, ami alapján

$$-\frac{b}{2} = -\frac{b^2}{12\eta} \quad \Rightarrow \quad \eta = -\frac{b}{6}$$

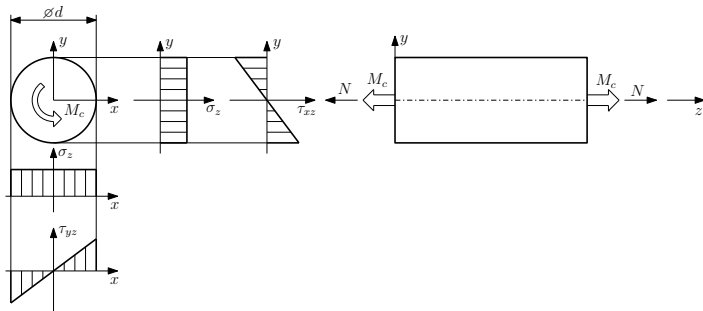
ez alapján kijelölhető az ún. **magidom** (ábrán a súlypont körüli rombusz). Ha itt terheljük  $F$  erővel a keresztmetszetet, akkor az egész keresztmetszetben azonos előjelű feszültség alakul ki.



# 7. Összetett igénybevételek

Kéttengelyű feszültségállapotok:

**7.2 Húzás és csavarás:** (csak kör és körgyűrű keresztmetszet)



Húzásból:  $\sigma_z = \frac{N}{A}$ ,  $\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$ ,  $\varepsilon_k = -\nu\varepsilon_z$

Csavarásból:  $\tau_{\varphi z} = \frac{M_c}{I_p} R$ ,  $\gamma_{\varphi z} = \frac{\tau_{\varphi z}}{G}$ ,  $E = 2G(1 + \nu)$

## 7. Összetett igénybevételek

Különböző feszültségek ébrednek a keresztmetszetben, melyből azonos veszélyességű húzófeszültséget számolunk. Erre szolgál a **redukált feszültség**, melyet a megengedett feszültséggel már össze lehet vetni. A Mohr-köröknél már látott két elméletből levezethető, hogy:

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma_z^2 + \beta \tau_{\varphi z}^2}$$

ahol

$$\beta = \begin{cases} 3, & \text{Huber-Mises-Hencky elmélet esetén} \\ 4, & \text{Mohr-elmélet esetén} \end{cases}$$

így

$$\sigma_{\text{red}}^{\text{max}} = \sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^2 + \beta \left(\frac{M_C}{K_p}\right)^2}$$

ellenőrzés:

$$\sigma_{\text{red}}^{\text{max}} \leq \sigma_{\text{meg}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^2 + \beta \left(\frac{M_C}{K_p}\right)^2} \leq \sigma_{\text{meg}}$$

méretezés két lépésben:

- 1 csak  $M_C$ -re méretezünk:  $\sqrt{\beta} \frac{|M_C|}{K_p} \leq \sigma_{\text{meg}} \rightarrow d_{\text{szüks}} = \dots$
- 2 ez alapján  $d$ -t megválasztva ellenőrzés minden igénybevételre ( $N + M_C$ -re)

## 7. Összetett igénybevételek

Ismert méretezési eljárás az eddigiek alapján csak  $M_C$ -re:

$$\tau_{\max} = \frac{|M_C|}{K_p} \leq \tau_{\text{meg}}$$

most

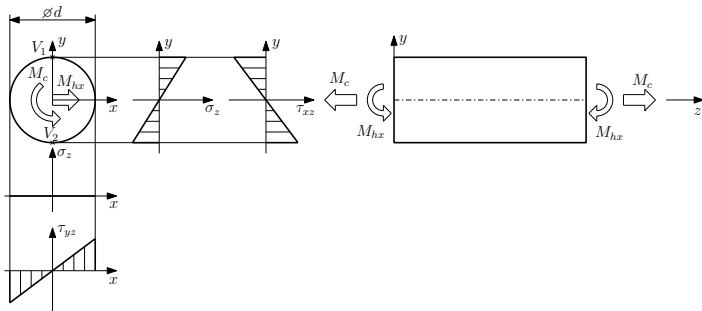
$$\sqrt{\beta} \tau_{\max} \leq \sigma_{\text{meg}}$$

tehát

$$\sigma_{\text{meg}} = \sqrt{\beta} \tau_{\text{meg}}$$

# 7. Összetett igénybevételek

## 7.3 Hajlítás és csavarás:



itt is  $\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_z^2 + \beta \tau_{\varphi z}^2}$ , a veszélyes pontok pedig  $V_1$  és  $V_2$

hajlítás:  $\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y$

csavarás:  $\tau_{\varphi z} = \frac{M_c}{I_p} R$



## 7. Összetett igénybevételek

vagyis a redukált feszültség:

$$\sigma_{\text{red}}^{\text{max}} = \sqrt{\left(\frac{M_{hx}}{K_x}\right)^2 + \beta \left(\frac{M_c}{K_p}\right)^2}$$

Kör és körgyűrű keresztmetszet esetén igaz, hogy  $K_p = 2K_x$  és  $I_p = 2I_x$  így

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{1}{K_x} \underbrace{\sqrt{M_{hx}^2 + \frac{\beta}{4} M_c^2}}_{M_{\text{red}}}$$

tehát

$$\sigma_{\text{red}}^{\text{max}} = \frac{M_{\text{red}}}{K_x}$$

ellenőrzés:

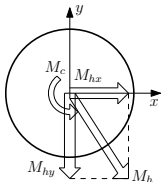
$$\frac{M_{\text{red}}}{K_x} \leq \sigma_{\text{meg}}$$

méretezés:

$$K_x \geq \frac{M_{\text{red}}}{\sigma_{\text{meg}}} = K_{\text{szüks}} \rightarrow d_{\text{szüks}} = \dots$$

# 7. Összetett igénybevételek

általánosítás:



$$M_h^2 = M_{hx}^2 + M_{hy}^2$$

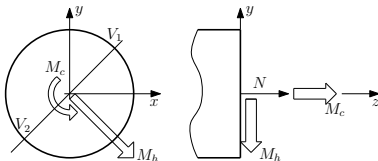
$$M_{\text{red}} = \sqrt{M_h^2 + \frac{\beta}{4} M_c^2}$$

$$M_{\text{red}} = \sqrt{M_{hx}^2 + M_{hy}^2 + \frac{\beta}{4} M_c^2}$$

Innentől használhatóak az előző fóliákon látott képletek az ellenőrzés/méretezés kérdésére.

# 7. Összetett igénybevételek

## 7.4 Húzás/nyomás + hajlítás + csavarás



Húzás:  $\sigma'_z = \frac{N}{A}$

Hajlítás x körül:  $\sigma''_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y$

Hajlítás y körül:  $\sigma'''_z = \frac{M_{hy}}{I_y} x$

Csavarás:  $\tau_{\varphi z} = \frac{M_c}{I_p} R$

A redukált feszültség:

$$\sigma_{\text{red}}^{\text{max}} = \sqrt{\left( \frac{|N|}{A} + \frac{|M_{hx}|}{K_x} + \frac{|M_{hy}|}{K_y} \right)^2 + \beta \left( \frac{|M_c|}{K_p} \right)^2}$$