

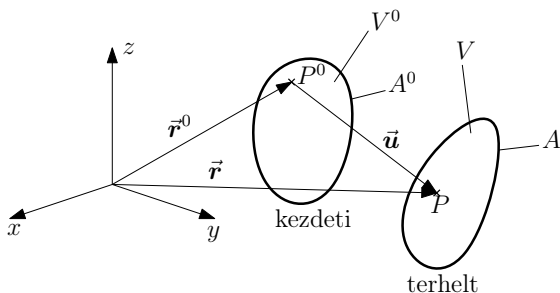
Mechanika

IV. előadás

2019. március 25.

2. Alakváltzási állapot

Elmozdulási állapot



Kezdeti konfiguráció, vagyis a terhelés előtti jellemzők: P^0 , \vec{r}^0 , A^0 , V^0 .

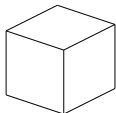
Pillanatnyi konfiguráció, vagyis a terhelt állapot jellemzői: P , \vec{r} , A , V .

Az elmozdulás: \vec{u} , $\vec{r} = \vec{r}^0 + \vec{u}$

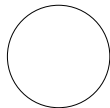
$$\vec{u} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z = u_x\vec{e}_x + u_y\vec{e}_y + u_z\vec{e}_z$$

2. Alakváltási állapot

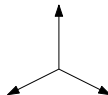
Elemi környezet: a pont olyan kis környezete, amelyben a mechanikai jellemzők véges számú adattal megadhatók, és a hely lineáris függvényei. Pl.:



elemi kocka



elemi gömb

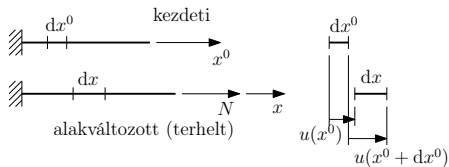


elemi triéder

Két erőrendszer egyenértékű, ha ugyanazt az alakváltozást hozzák létre.

2. Alakváltóási állapot

Alakváltóás 1D-ben: vonalelem, elemi ívhossz



elmozdulás: $\vec{u} = u\vec{e}_x$, $u = u(x^0)$

differenciális elmozdulás: $du = u(x^0 + dx^0) - u(x^0)$

ábra alapján:

$$u(x^0) + dx = dx^0 + u(x^0 + dx^0)$$

$$dx - dx^0 = du; \quad dx^0 > 0, \quad dx > 0$$

2. Alakváltóási állapot

Alakváltóások:

– Volanelem arány:

$$\lambda = \frac{dx}{dx^0} = \frac{dx^0 + du}{dx^0} = 1 + \frac{du}{dx^0} = \begin{cases} > 1 \text{ nyúlás} \\ = 1 \\ < 1 \text{ rövidülés} \end{cases}$$

– Fajlagos nyúlások:

- kezdeti hosszra vonatkozó (mérnöki)

$$\varepsilon^0 = \frac{dx - dx^0}{dx^0} = \frac{du}{dx^0} = \lambda - 1$$

- terhelt hosszra vonatkozó (valódi)

$$\varepsilon = \frac{dx - dx^0}{dx} = \frac{du}{dx} = 1 - \frac{1}{\lambda}$$

- Lagrange-féle

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\text{Lag}} &= \frac{1}{2} \frac{(dx)^2 - (dx^0)^2}{(dx^0)^2} = \frac{1}{2} \frac{2dx^0 du + (du)^2}{(dx^0)^2} = \frac{du}{dx^0} + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx^0} \right)^2 = \lambda - 1 + \frac{1}{2} (\lambda - 1)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \lambda^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1) \end{aligned}$$

2. Alakváltzási állapot

- Euler-féle

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\text{Eul}} &= \frac{1}{2} \frac{(dx)^2 - (dx^0)^2}{(dx)^2} = \frac{1}{2} \frac{2dx^0 du + (du)^2}{(dx)^2} = \frac{1}{\lambda} \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right)^2 = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda} \right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right)\end{aligned}$$

- Hencky-féle (logaritmikus)

$$\varepsilon^{\text{log}} = \ln \lambda$$

Kis alakváltzás: ha $\frac{du}{dx^0} \approx \frac{du}{dx}$ hányados nagyságrendje jóval kisebb, mint 1 (10^{-3} vagy ettől kisebb nagyságrendű)

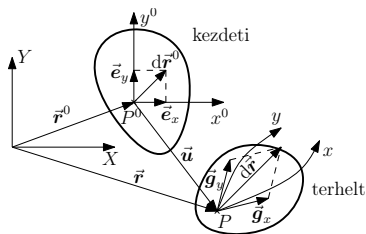
következmény: $dx^0 \approx dx \Rightarrow x^0 \approx x$

Ekkor a fajlagos nyúlások: $\varepsilon^0 \approx \varepsilon \approx \varepsilon^{\text{Lag}} \approx \varepsilon^{\text{Eul}} \approx \varepsilon^{\text{log}}$

tehát csak egyetlen fajlagos nyúlást számítunk ilyenkor: $\varepsilon \approx \frac{du}{dx^0} = \frac{du}{dx}$

2. Alakváltási állapot

Alakváltás 2D-ben



$$P^0 \rightarrow P$$

$$\vec{r}^0 = x^0 \vec{e}_x + y^0 \vec{e}_y \rightarrow \vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y$$

Mozgástörvény:

$$\left. \begin{aligned} x &= x(x^0, y^0) \\ y &= y(x^0, y^0) \end{aligned} \right\}$$

Az anyagi vonalak (x^0, y^0) érintői:

$$\vec{e}_x = \frac{\partial \vec{r}^0}{\partial x^0} \rightarrow \vec{g}_x = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^0}; \quad \vec{e}_y = \frac{\partial \vec{r}^0}{\partial y^0} \rightarrow \vec{g}_y = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^0}; \quad d\vec{r}^0 \rightarrow d\vec{r}$$

2. Alakváltzási állapot

Alakváltzási gradiens

$$\begin{aligned}d\vec{r} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^0} \underbrace{dx^0}_{\vec{e}_x \cdot d\vec{r}^0} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^0} \underbrace{dy^0}_{\vec{e}_y \cdot d\vec{r}^0} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^0} (\vec{e}_x \cdot d\vec{r}^0) + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^0} (\vec{e}_y \cdot d\vec{r}^0) = \\ &= \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^0} \circ \vec{e}_x \right) \cdot d\vec{r}^0 + \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial y^0} \circ \vec{e}_y \right) \cdot d\vec{r}^0 = \underbrace{\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x^0} \circ \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^0} \circ \vec{e}_y \right)}_{\underline{\underline{\mathbf{F}}}} \cdot d\vec{r}^0\end{aligned}$$

tehát a kezdeti és a terhelt állapot közötti kapcsolatot az alakváltzási gradiens tenzor ($\underline{\underline{\mathbf{F}}}$) írja le:

$$d\vec{r} = \underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot d\vec{r}^0$$

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^0} \circ \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^0} \circ \vec{e}_y = \vec{g}_x \circ \vec{e}_x + \vec{g}_y \circ \vec{e}_y$$

más szavakkal az alakváltzási gradiens tenzor a kezdeti állapot anyagi vonalainak érintő egységvektoraihoz a terhelt állapot anyagi vonalainak érintő vektorát rendeli hozzá

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \vec{r} \circ \left(\frac{\partial}{\partial x^0} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y^0} \vec{e}_y \right) = \vec{r} \circ \nabla^0$$

2. Alakváltóási állapot

Beírva az alakváltóási gradiensbe az $\vec{r} = \vec{r}^0 + \vec{u}$ felbontást:

$$\underline{\underline{F}} = (\vec{r}^0 + \vec{u}) \circ \nabla^0 = \underbrace{\vec{r}^0 \circ \nabla^0}_{\underline{\underline{1}}} + \underbrace{\vec{u} \circ \nabla^0}_{\underline{\underline{U}}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{U}}$$

Itt $\underline{\underline{U}}$ az ún. elmozdulási gradiens tenzor. Mátrixosan kifejtve:

$$[\underline{\underline{F}}] = [\vec{r} \circ \nabla^0] = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^0} & \frac{\partial}{\partial y^0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x^0} & \frac{\partial x}{\partial y^0} \\ \frac{\partial y}{\partial x^0} & \frac{\partial y}{\partial y^0} \end{bmatrix}$$

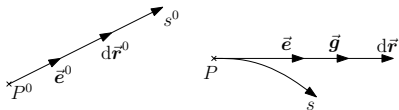
$$[\vec{r}^0 \circ \nabla^0] = \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^0} & \frac{\partial}{\partial y^0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^0}{\partial x^0} & \frac{\partial x^0}{\partial y^0} \\ \frac{\partial y^0}{\partial x^0} & \frac{\partial y^0}{\partial y^0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [\underline{\underline{1}}]$$

$$[\underline{\underline{U}}] = [\vec{u} \circ \nabla^0] = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^0} & \frac{\partial}{\partial y^0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x^0} & \frac{\partial u}{\partial y^0} \\ \frac{\partial v}{\partial x^0} & \frac{\partial v}{\partial y^0} \end{bmatrix}$$

Speciális eset: $\vec{g}_x = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_x$, $\vec{g}_y = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_y$. Ebből általánosítva következik bármely tetszőleges n anyagi vonalra nézve, hogy: $\vec{g}_n = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_n$.

2. Alakváltóási állapot

Ívelem változása:



$$d\vec{r}^0 = ds^0 \vec{e}^0; \quad d\vec{r} = ds \vec{e}; \quad |\vec{e}^0| = |\vec{e}| = 1$$

$$\vec{g} = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}^0$$

$$d\vec{r} = \underline{\underline{F}} \cdot d\vec{r}^0 = \underline{\underline{F}} \cdot ds^0 \vec{e}^0 = ds^0 \underbrace{\underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}^0}_{\vec{g}}$$

$$d\vec{r} = ds^0 \vec{g}$$

$$|d\vec{r}| = ds^0 |\vec{g}| = ds \Rightarrow \frac{ds}{ds^0} = |\vec{g}|$$

Így a vonalelemarány:

$$\lambda = \frac{ds}{ds^0} = |\vec{g}| = \sqrt{\underline{\underline{g}}^2} = \sqrt{\underline{\underline{g}}^T \underline{\underline{g}}} = \sqrt{\vec{e}^0 \cdot \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}^0}$$

2. Alakváltzási állapot

Speciális eset:

$$\vec{e}^0 = \vec{e}_x \rightarrow \lambda_x = |\vec{g}_x| = \sqrt{\vec{e}_x \cdot \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_x}$$

$$\vec{e}^0 = \vec{e}_y \rightarrow \lambda_y = |\vec{g}_y| = \sqrt{\vec{e}_y \cdot \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_y}$$

Általánosan tehát:

$$\vec{e}^0 = \vec{e}_n \rightarrow \lambda_n = |\vec{g}_n| = \sqrt{\vec{e}_n \cdot \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_n}$$

Alakváltzási mértékek:

- fajlagos nyúlások (mint 1D-ben):

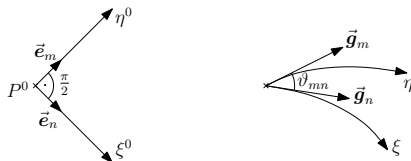
$$\epsilon^0 = \frac{ds - ds^0}{ds^0} = \lambda - 1, \quad \epsilon = \frac{ds - ds^0}{ds} = 1 - \frac{1}{\lambda},$$

$$\epsilon^{\text{Lag}} = \frac{1}{2} \frac{ds^2 - (ds^0)^2}{(ds^0)^2} = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1) \quad \epsilon^{\text{Eul}} = \frac{1}{2} \frac{ds^2 - (ds^0)^2}{ds^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)$$

$$\epsilon^{\text{log}} = \ln \lambda$$

2. Alakváltóási állapot

- szögtorzulás:



Terhelés előtt a két anyagi vonal (ξ^0, η^0) által bezárt szög $\frac{\pi}{2}$. Terhelés után: $\vartheta_{mn} = \vartheta_{nm}$. A szögtorzulás:

$$\gamma_{mn} = \frac{\pi}{2} - \vartheta_{mn}$$

Kiszámítása a két vektor skaláris szorzata alapján:

$$\cos \vartheta_{mn} = \frac{\vec{g}_m \cdot \vec{g}_n}{|\vec{g}_m| |\vec{g}_n|} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{mn} \right) = \sin \gamma_{mn} \left(= \frac{\vec{e}_m \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}^T}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \vec{e}_n}{\lambda_m \lambda_n} \right)$$

2. Alakváltóási állapot

Kis alakváltások esetén:

$$\left| \frac{\partial \vec{u}}{\partial x^0} \right| \approx \left| \frac{\partial \vec{u}}{\partial y^0} \right| \approx \left| \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \right| \approx \left| \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \right| \ll 1$$

következmény:

$$\vec{e}_x \approx \vec{g}_x, \dots; \quad ds \approx ds^0; \quad \nabla^0 \approx \nabla$$

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}} = \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \vec{u} \circ \nabla^0 = \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \vec{u} \circ \nabla$$

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}} \approx (\underline{\underline{\mathbf{1}}} + \nabla \circ \vec{u}) (\underline{\underline{\mathbf{1}}} + \vec{u} \circ \nabla) = \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \underbrace{\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u}}_{2\underline{\underline{\mathbf{A}}}} + \underbrace{(\nabla \circ \vec{u}) \cdot (\vec{u} \circ \nabla)}_{\approx 0}$$

Linearizálás után:

$$\underline{\underline{\mathbf{F}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}} = \underline{\underline{\mathbf{1}}} + 2\underline{\underline{\mathbf{A}}} \Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \frac{1}{2} (\vec{u} \circ \nabla + \nabla \circ \vec{u})$$

2. Alakváltóási állapot

Alakváltóási jellemzők, kis alakváltóások esetén:

$$\lambda_n^2 = \underline{\underline{\mathbf{e}_n}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}^T}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}_n}} = \underline{\underline{\mathbf{e}_n}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{1}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}_n}} + 2\underline{\underline{\mathbf{e}_n}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}_n}}$$

- fajlagos nyúlás:

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1) = \underline{\underline{\mathbf{e}_n}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}_n}} \approx \lambda_n - 1$$

- szögtorzulás:

$$\gamma_{mn} \approx \sin \gamma_{mn} = \frac{\underline{\underline{\mathbf{e}_m}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}^T}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}_n}}}{\lambda_m \lambda_n}$$

$$\lambda_m \lambda_n \gamma_{mn} = \underline{\underline{\mathbf{e}_m}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}^T}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{F}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}_n}}$$

$$\underbrace{(1 + \varepsilon_m)(1 + \varepsilon_n)}_{\approx 1} \gamma_{mn} = \underbrace{\underline{\underline{\mathbf{e}_m}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{1}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}_n}} + 2\underline{\underline{\mathbf{e}_m}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}_n}}}_0$$

$$\gamma_{mn} = 2\underline{\underline{\mathbf{e}_m}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}_n}} \quad \text{vagy} \quad \frac{1}{2} \gamma_{mn} = \underline{\underline{\mathbf{e}_m}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}_n}} = \underline{\underline{\mathbf{e}_n}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}_m}}$$

2. Alakváltzási állapot

Az alakváltzási gradiens ($\underline{\underline{F}}$) és az elmozdulási gradiens ($\underline{\underline{U}}$) tenzorok additív felbontása:

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{U}}; \quad \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{u}} \circ \nabla$$

$$\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{U}}_{\text{sz}} + \underline{\underline{U}}_{\text{asz}}$$

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{U}}_{\text{sz}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{U}} + \underline{\underline{U}}^T) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{u}} \circ \nabla + \nabla \circ \underline{\underline{u}}) : \text{alakváltzási tenzor}$$

$$\underline{\underline{\Psi}} = \underline{\underline{U}}_{\text{asz}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{U}} - \underline{\underline{U}}^T) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{u}} \circ \nabla - \nabla \circ \underline{\underline{u}}) : \text{forgási tenzor}$$

A $d\vec{r}^0$ vonalelem mozgása:

$$d\vec{r} = \underline{\underline{F}} \cdot d\vec{r}^0 = (\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{U}}) \cdot d\vec{r}^0 = \underbrace{\underline{\underline{1}} \cdot d\vec{r}^0}_{\text{merevtestszerű eltolódás}} + \underbrace{\underline{\underline{A}} \cdot d\vec{r}^0}_{\text{alakváltzás}} + \underbrace{\underline{\underline{\Psi}} \cdot d\vec{r}^0}_{\text{forgás}}$$

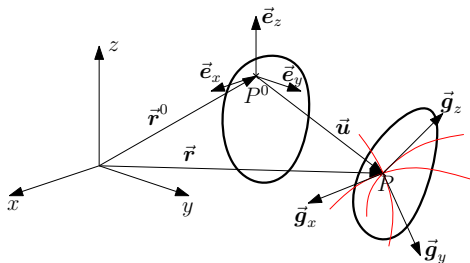
Kis alakváltzások esetén kis forgások lépnek fel ($\underline{\underline{\Psi}}$ minden eleme $\ll 1$). Képezhető a forgás tenzor vektorinvariánsa (minden aszimmetrikus tenzor esetén képezhető), melyre igaz:

$$\underline{\underline{\Psi}} \cdot d\vec{r}^0 = \vec{\psi} \times d\vec{r}^0$$

ahol $\vec{\psi}$ a forgásvektor.

2. Alakváltzási állapot

Alakváltzás 3D-ben:



$$d\vec{r} = \underline{\underline{F}} \cdot d\vec{r}^0, \quad \underline{\underline{F}} = \vec{r} \circ \nabla^0 \quad \vec{g}_x = \underline{\underline{F}} \cdot \vec{e}_x, \dots$$

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{U}}; \quad \underline{\underline{U}} = \vec{u} \circ \nabla^0$$

2. Alakváltóási állapot

Az alakváltóási mértékek meghatározása ugyanúgy történik, mint 2D-ben:

- vonalelem arány:

$$\lambda_n = |\underline{\mathbf{g}}_n| = \sqrt{\underline{\mathbf{e}}_n \cdot \underline{\mathbf{F}}^T \cdot \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_n}$$

- fajlagos nyúlások:

$$\varepsilon^0 = \frac{ds - ds^0}{ds^0} = \lambda - 1; \quad \varepsilon = \frac{ds - ds^0}{ds} = 1 - \frac{1}{\lambda}$$

$$\varepsilon^{\text{Lag}} = \frac{ds^2 - (ds^0)^2}{(ds^0)^2} = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1); \quad \varepsilon^{\text{Eul}} = \frac{ds^2 - (ds^0)^2}{ds^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right);$$

$$\varepsilon^{\text{log}} = \ln \lambda$$

- fajlagos szögtorzulás

$$\sin \gamma_{mn} = \frac{\underline{\mathbf{g}}_m \cdot \underline{\mathbf{g}}_n}{\lambda_m \lambda_n} = \frac{\underline{\mathbf{e}}_m \cdot \underline{\mathbf{F}}^T \cdot \underline{\mathbf{F}} \cdot \underline{\mathbf{e}}_n}{\lambda_m \lambda_n}$$

2. Alakváltzási állapot

Kis alakváltzások esete, linearizált formulák:

$$\underline{\underline{\mathbf{U}}} = \underline{\underline{\mathbf{U}}}_{sz} + \underline{\underline{\mathbf{U}}}_{asz} = \underline{\underline{\mathbf{u}}} \circ \nabla$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{U}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Kis alakváltzásról beszélünk, ha $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$ minden eleme jóval kisebb nagyságrendű, mint 1. Ekkor érvényes:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{U}}}_{sz}; \quad \underline{\underline{\Psi}} = \underline{\underline{\mathbf{U}}}_{asz}$$

Alakváltzás xyz koordináta-rendszerben:

$$\epsilon_n = \underline{\underline{\mathbf{e}}}_n \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}}}_n \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \epsilon_x &= \underline{\underline{\mathbf{e}}}_x \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}}}_x \\ \epsilon_y &= \underline{\underline{\mathbf{e}}}_y \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}}}_y \\ \epsilon_z &= \underline{\underline{\mathbf{e}}}_z \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}}}_z \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{mn} = \underline{\underline{\mathbf{e}}}_m \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}}}_n \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \gamma_{xy} &= \underline{\underline{\mathbf{e}}}_x \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}}}_y \\ \frac{1}{2} \gamma_{yz} &= \underline{\underline{\mathbf{e}}}_y \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}}}_z \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} &= \underline{\underline{\mathbf{e}}}_z \cdot \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}}}_x \end{aligned}$$

2. Alakváltóási állapot

Az alakváltóási tenzor mátrixa xyz koordináta-rendszerben:

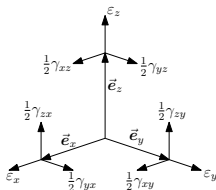
$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Az additív felbontás ($\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{U}}} + \underline{\underline{\mathbf{U}}^T})$) miatt az alábbi kinematikai egyenletek fogalmazhatóak meg:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

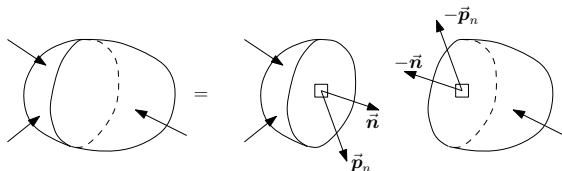
$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

Szemléltetés:



3. Feszültségi állapot

A feszültségvektor értelmezése: részekre bontott test



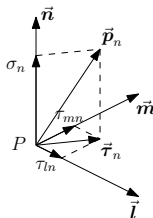
Feszültségvektor: a belső erőrendszer sűrűségvektora: \vec{p}_n , mértékegysége: $1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \text{ Pa}$.

Általánosan: $\vec{p} = \vec{p}(P, \vec{n})$, P -t rögzítve: $\vec{p} = \vec{p}(\vec{n}) = \vec{p}_n$.

3. Feszültségi állapot

Feszültségállapot: a ponton átfektethető normálisokon ébredő feszültségvektorok összessége.

Felbontása: $\vec{p}_n = \vec{\sigma}_n + \vec{\tau}_n$



Normálfeszültség:

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{\sigma}_n = \vec{n} \cdot \vec{p}_n = \begin{cases} > 0 \text{ húzó} \\ < 0 \text{ nyomó} \end{cases}$$

Csúsztató feszültség:

$$\vec{\tau}_n = \vec{p}_n - \vec{\sigma}_n$$

$$\tau_{mn} = \vec{m} \cdot \vec{\tau}_n = \vec{m} \cdot \vec{p}_n, \quad \tau_{ln} = \vec{l} \cdot \vec{\tau}_n = \vec{l} \cdot \vec{p}_n$$

Tehát az \vec{n} , \vec{m} , \vec{l} bázisban a feszültségvektor: $\vec{p}_n = \sigma_n \vec{n} + \tau_{mn} \vec{m} + \tau_{ln} \vec{l}$

3. Feszültségi állapot

Feszültségtenzor:

elemi tetraéder egyensúlya:

$$\vec{n} = n_x \vec{e}_x + n_y \vec{e}_y + n_z \vec{e}_z$$

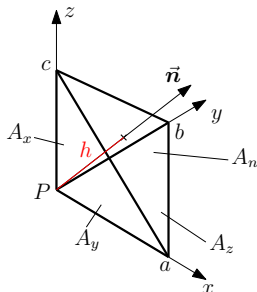
Az A_n felület területvektorának képzése:

$$\vec{A}_n = \frac{1}{2} (\vec{r}_{ab} \times \vec{r}_{ac})$$

$$\begin{aligned} \vec{A}_n &= \frac{1}{2} (b\vec{e}_y - a\vec{e}_x) \times (c\vec{e}_z - a\vec{e}_x) = \\ &= \frac{1}{2} (bc\vec{e}_x + ac\vec{e}_y + ab\vec{e}_z) \end{aligned}$$

$$\vec{A}_n = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z = A_n \vec{n}; \quad |\vec{n}| = 1$$

$$A_x = \frac{1}{2} bc = A_n \vec{n} \cdot \vec{e}_x = A_n n_x, \quad A_y = \frac{1}{2} ac = A_n n_y; \quad A_z = \frac{1}{2} ab = A_n n_z$$



3. Feszültségi állapot

Egyensúly:

$$\int_{A_x} \vec{p}_{-x} dA + \int_{A_y} \vec{p}_{-y} dA + \int_{A_z} \vec{p}_{-z} dA + \int_{A_n} \vec{p}_n dA + \int_V \vec{q} dV = \vec{0}$$

Például:

$$\int_{A_y} \vec{p}_{-y} dA = - \int_{A_y} \vec{p}_y dA = \underbrace{-\vec{p}_y(S_y)}_{\text{súlypontban véve}} A_y = -\vec{p}_y(S_y) A_n n_y \quad y \rightarrow x \rightarrow z$$

$$\int_{A_n} \vec{p}_n dA = \vec{p}_n(S_n) A_n; \quad \int_V \vec{q} dV = \vec{q}(S) V = \vec{q}(s) \frac{A_n h}{3}$$

Mivel elemi környezetről van szó, ezért:

$$h \rightarrow 0, \text{ de } \vec{n} = \text{áll.}$$

$$S_x, S_y, S_z, S_n, S \rightarrow P, \quad V \rightarrow 0$$

3. Feszültségi állapot

$$-\vec{p}_x(S_x)A_n n_x - \vec{p}_y(S_y)A_n n_y - \vec{p}_z(S_z)A_n n_z + -\vec{p}_n(S_n)A_n + \vec{q}(S)\frac{A_n h}{3} = \vec{0}$$

Figyelembe véve a határértékeket, egyszerűsítés után P -ben:

$$\vec{p}_n = \vec{p}_x n_x + \vec{p}_y n_y + \vec{p}_z n_z$$

Például:

$$\vec{p}_x n_x = \vec{p}_x (\vec{e}_x \cdot \vec{n}) = (\vec{p}_x \circ \vec{e}_x) \cdot \vec{n}$$

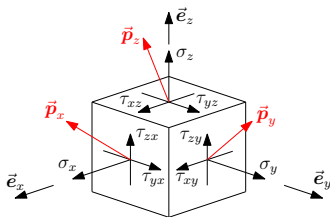
Így

$$\vec{p}_n = (\vec{p}_x \circ \vec{e}_x + \vec{p}_y \circ \vec{e}_y + \vec{p}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \vec{n} = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{n}$$

Ez az ún. Cauchy-tétel, ahol $\underline{\underline{T}}$ a P pontbeli feszültségi tenzor

3. Feszültségi állapot

Szemléltetés az xyz koordináta-rendszerben az elemi kockán:



A Cauchy-tétel alapján:

$$\vec{p}_x = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{e}_x; \quad \vec{p}_y = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{e}_y; \quad \vec{p}_z = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{p}_x = \sigma_x \vec{e}_x + \tau_{yx} \vec{e}_y + \tau_{zx} \vec{e}_z$$

$$\vec{p}_y = \tau_{xy} \vec{e}_x + \sigma_y \vec{e}_y + \tau_{zy} \vec{e}_z$$

$$\vec{p}_z = \tau_{xz} \vec{e}_x + \tau_{yz} \vec{e}_y + \sigma_z \vec{e}_z$$

3. Feszültségi állapot

A feszültségi tenzor mátrixa:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{T}}} &= [\vec{\rho}_x \quad \vec{\rho}_y \quad \vec{\rho}_z] \\ \underline{\underline{\mathbf{T}}} &= \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tetszőleges \vec{n} irányhoz tartozó feszültségi koordináták meghatározása $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ alapján:

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{n} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \vec{n}$$

$$\tau_{mn} = \vec{m} \cdot \vec{\rho}_n = \vec{m} \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \vec{n}$$

3. Feszültségi állapot

Az elemi kocka egyensúlya alapján:

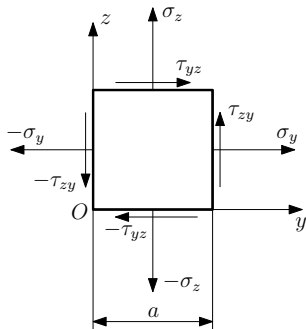
$$M_x = a\tau_{zy} - a\tau_{yz} = 0 \Rightarrow \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Az elemi kocka tetszőlegesen állhat, tetszőleges \vec{n} , \vec{m} , \vec{l} bázisban, tehát általánosítva is igaz, hogy $\tau_{mn} = \tau_{nm}$. Következmény:

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^T$$

vagyis a feszültségi tenzor szimmetrikus.

$$\tau_{mn} = \vec{m} \cdot \vec{p}_n = \vec{m} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \vec{n} = \vec{n} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \vec{m}$$



3. Feszültségi állapot

A feszültségi tenzor főteengelyproblémája: ha a feszültségi tenzorhoz található egy olyan \vec{e} vektor, melyre teljesül az alábbi sajátérték-feladat, hogy:

$$\underline{\underline{T}} \cdot \vec{e} = \sigma \vec{e}$$

akkor az \vec{e} vektor a feszültségi tenzor sajátvektora vagy főiránya, a hozzá tartozó σ érték pedig az ún. főfeszültség. Bizonyítható, hogy minden feszültségi tenzorhoz található 3 egymásra kölcsönösen merőleges, jobbsodrású rendszert alkotó főirány, és 3 főfeszültség. A főfeszültségeket $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ -mal jelöljük, megállapodás szerint: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. A főfeszültségekhez tartozó főirányokat pedig $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ -mal jelöljük. A feszültségi tenzor mátrixa a főteengelyek koordináta-rendszerében:

$$\left[\underline{\underline{T}} \right]_{(1,2,3)} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Ha a főfeszültségek közül egy/kettő/három nem zérus értékű, akkor a feszültségállapotot egy/kettő/három tengelyűnek nevezzük.

