Mechanika

I. előadás

2024. szeptember 10.

Elérhetőségek, információk

Tantárgy: Műszaki mechanika (GEMET611MB, GEMET611MBL),
Mechanika (GEMET266B, GEMET266BL)
Előadó: Dr. Lengyel Ákos József
Elérhetőségek:

- Iroda: Miskolc, Egyetemváros, A/4. épület 441.
- Tel.: +36-46-565-111/18-78
- E-mail: akos.lengyel@uni-miskolc.hu
- Honlap: https://geik.uni-miskolc.hu/intezetek/MMI/LengyelAkos
- Feladatok:
  https://geik.uni-miskolc.hu/intezetek/MMI/SzirbikSandor
  és itt a "Statika feladatok" illetve a "Szilárdságtan feladatok" példatárakat kell kiválasztani

A) **Statika**

1. Bevezetés, alapfogalmak

Mechanika, mint tudomány tárgya: testek, anyagi rendszerek mozgásának és tartós nyugalmának feltételeit, okait vizsgálja.

Műszaki mechanika: a mechanika elveinek alkalmazása műszaki feladatokra. Például

- tartós nyugalom biztosítása
- teherbíró képesség meghatározása: méretezés, ellenőrzés
- dinamika: előírt mozgások biztosítása

Modellezés a mechanikában:

- modellezés: a valóságos viszonyokat a vizsgálatok szempontjából lényegesnek ítélt tulajdonságok kiemelésével leegyszerűsítjük $\rightarrow$ modellt alkotunk
- folyamata:
  - megfigyelés, mérés
  - leírás
  - *törvények megfogalmazása, alkalmazása, számolás* (ezzel fogunk foglalkozni)
  - ellenőrzés, pontosítás
- fontosabb modellek:
  - **merev test**: olyan test, amely pontjainak egymáshoz viszonyított távolsága mozgás közben nem változik, térbeli helyzetét 6 adat határozza meg. Spec. eset: **anyagi pont** $\equiv$ **tömegpont**, olyan merev test, amelynek mozgását egyetlen pontja mozgásával írjuk le, térbeli helyzetét 3 koordináta jellemzi, szabadsági foka 3.

1. Bevezetés, alapfogalmak

- fontosabb modellek (folytatás):
    - **szilárd test:** alakváltozásra képes test, terhelés mozgás során pontjainak egymáshoz viszonyított távolsága változik. Pl.: **rugalmas test** (a terhelés levétele után visszanyeri eredeti alakját), **képlékeny test** (a terhelés levétele után nem nyeri vissza eredeti alakját), **viszkózus testek** (polimerek)
    - **koncentrált erő:** egyik testnek a másik testre történő hatása (gravitáció, érintkezés útján, rugó, stb.)

a mechanika egy lehetséges felosztása

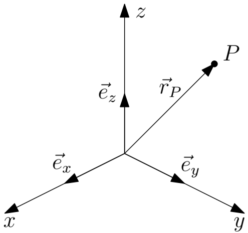
- merev testek mechanikája (statika, dinamika)
- szilárd testek mechanikája (szilárdságtan, rugalmasságtan)
- folyadékok, gázok mechanikája (áramlástan)

Fizikai mennyiségek típusai

- skaláris mennyiség: nagyság, mértékegység (térfogat, V [cm^3], sűrűség, ρ $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$, tömeg, m [kg], stb.)
- vektoriális mennyiség: nagyság, irány, mértékegység (erő, $\vec{F}$ [N], sebesség, $\vec{v}$ $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$, gyorsulás, $\vec{a}$ $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$, stb.)
- tenzor mennyiség: (később)

1. Bevezetés, alapfogalmak

Koordináta-rendszer: Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer (DDKR). Ez egy merev test, amihez képest a mozgásokat viszonyítjuk.

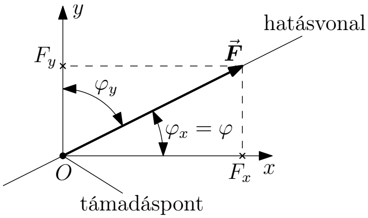


- bázisvektorok: $\vec{\boldsymbol{e}}_x$, $\vec{\boldsymbol{e}}_y$, $\vec{\boldsymbol{e}}_z$
- koordináták: x, y, z
- a P pont helyvektora: $\vec{\boldsymbol{r}}_P = x\vec{\boldsymbol{e}}_x + y\vec{\boldsymbol{e}}_y + z\vec{\boldsymbol{e}}_z$ [m]
- tetszőleges vektor: $\vec{\boldsymbol{v}} = v_x\vec{\boldsymbol{e}}_x + v_y\vec{\boldsymbol{e}}_y + v_z\vec{\boldsymbol{e}}_z$ $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$

Statika tárgya: merev testekből álló rendszer tartós nyugalmának biztosításához szükséges külső és belső erők meghatározása.

2. Anyagi pont statikája

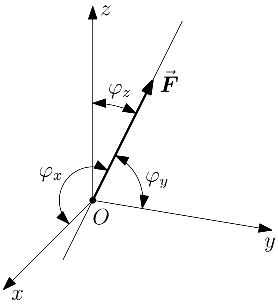
2.1 Anyagi pontra ható erő megadása
a) síkbeli eset (2D):



az erővektor $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y$ [N]
az erő irányvektora: $\vec{e}$, $\vec{F} = F\vec{e}$, ahol $F = |\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$
$\vec{e} = \cos\varphi_x\vec{e}_x + \cos\varphi_y\vec{e}_y = \cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y$

2. Anyagi pont statikája

b) térbeli eset (3D):



$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$$

irányvektor:

$$\vec{e} = \cos\varphi_x \vec{e}_x + \cos\varphi_y \vec{e}_y + \cos\varphi_z \vec{e}_z$$

$$|\vec{e}| = 1 = \cos^2\varphi_x + \cos^2\varphi_y + \cos^2\varphi_z$$

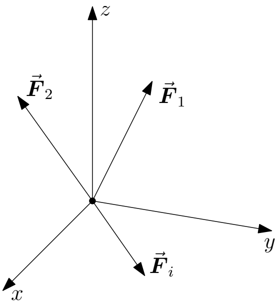
két szög független, a harmadik belőlük számítható. Az erő nagysága:

$$F = |\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\vec{F} = F\vec{e} = \underbrace{F\cos\varphi_x}_{F_x} \vec{e}_x + \underbrace{F\cos\varphi_y}_{F_y} \vec{e}_y + \underbrace{F\cos\varphi_z}_{F_z} \vec{e}_z$$

2. Anyagi pont statikája

2.2 Anyagi pontra ható erőrendszer (ER)
a) értelmezés: anyagi pontra ható erők összessége



ER: $\vec{\boldsymbol{F}}_i$; $i = 1, 2, \ldots, n$ (adott)
hatásvonalaik irányvektorai: $\vec{\boldsymbol{e}}_i$; $i = 1, \ldots, n$; $|\vec{\boldsymbol{e}}_i| = 1$
jellemző: közös támadáspont (közös ponton támadó ER)
az erők nagysága: $F_i = |\vec{\boldsymbol{F}}_i| = \sqrt{F_{ix}^2 + F_{iy}^2 + F_{iz}^2}$

2. Anyagi pont statikája

b) az ER eredője
Értelemzés: az $\vec{\boldsymbol{F}}_i$; $i = 1, \ldots, n$ db koncentrált erőből álló ER eredője az erők összege.

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{F}}_1 + \vec{\boldsymbol{F}}_2 + \ldots + \vec{\boldsymbol{F}}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\boldsymbol{F}}_i$$

az eredő erő koordinátái:

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}$$

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}$$

$$F_z = F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz} = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}$$

így az eredő

$$\vec{\boldsymbol{F}} = F_x \vec{\boldsymbol{e}}_x + F_y \vec{\boldsymbol{e}}_y + F_z \vec{\boldsymbol{e}}_z$$

2. Anyagi pont statikája

c) az anyagi pontra ható ER egyensúlya

Értelmezés: az anyagi pontra ható $\vec{\boldsymbol{F}}_i$, $i = 1, \ldots, n$ koncentrált erőkből álló ER egyensúlyi ER, ha eredőjük zérus, vagyis $\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{F}}_1 + \ldots + \vec{\boldsymbol{F}}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\boldsymbol{F}}_i = \vec{\boldsymbol{0}}$

vetületi vagy skaláris egyensúlyi egyenletek:

$$\left.\begin{array}{ll} \vec{\boldsymbol{e}}_x : & F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = 0 \\ \vec{\boldsymbol{e}}_y : & F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = 0 \\ \vec{\boldsymbol{e}}_z : & F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz} = 0 \end{array}\right\} \text{3 db egyenlet}$$

d) az anyagi pont <u>tartós</u> nyugalma

Newton I. mozgástörvénye: ha az anyagi pontra ható ER eredője zérus, akkor az anyagi pont vagy tartós nyugalomban van, vagy egyenes vonalú egyenletes mozgást végez

- az ER egyensúlya szükséges feltétel a tartós nyugalomhoz
- speciális esetek:
  - $n = 1$: egyetlen erő $\rightarrow$ nyugalom nem lehetséges
  - $n = 2$: $\vec{\boldsymbol{F}}_1$; $\vec{\boldsymbol{F}}_2$: egyensúly feltétele, hogy $\vec{\boldsymbol{F}}_1 + \vec{\boldsymbol{F}}_2 = \vec{\boldsymbol{0}} \quad \Rightarrow \quad \vec{\boldsymbol{F}}_1 = -\vec{\boldsymbol{F}}_2$
    jellemzőik tehát, hogy azonos a hatásvonaluk, a nagyságuk, de ellentétes az irányuk

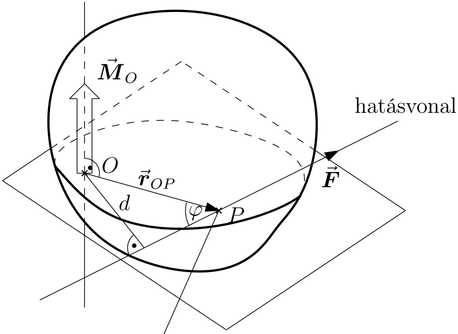
e) anyagi pontra ható két ER <u>egyenértékűsége</u>

Értelmezés: két különböző ER egyenértékű, ha az eredőjük megegyezik egymással (csak anyagi pontnál)

3. Merev testre ható erőrendszer

3.1 Koncentrált erő pontra számított nyomatéka

a) értelmezés: a P pontban támadó $\vec{F}$ erő nyomatéka az O pontra: $\vec{M}_O = \vec{r}_{OP} \times \vec{F}$ [Nm]



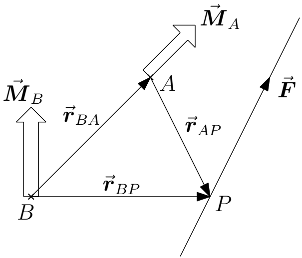
következmények:

- $\vec{M}_O \perp \left(\vec{r}_{OP}; \vec{F}\right)$; iránya a jobbkézszabály szerint
- $\vec{M}_O$ nagysága: $|\vec{M}_O| = |\vec{r}_{OP}||\vec{F}|\sin\varphi = |\vec{F}|\underbrace{|\vec{r}_{OP}|\sin\varphi}_{d} = F \cdot d$

  vagyis erőször erőkar
- Az erő nem ad nyomatékot hatásvonalának pontjaira (igazolás: az erő karja zérus lesz).
- Az erő a hatásvonala mentén eltolható, nyomatéka nem változik. (igazolás: az erőt áttoljuk a hatásvonal egy tetszőleges pontjába, az erőkar változatlan marad).

3. Merev testre ható erőrendszer

b) összefüggés két pontra számított nyomaték között



$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AP} \times \vec{F}$$

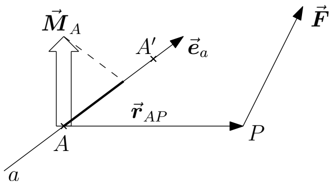
$$\vec{M}_B = \vec{r}_{BP} \times \vec{F} = (\vec{r}_{BA} + \vec{r}_{AP}) \times \vec{F} =$$

$$= \vec{r}_{BA} \times \vec{F} + \underbrace{\vec{r}_{AP} \times \vec{F}}_{\vec{M}_A} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{r}_{BA} \times \vec{F} = \vec{M}_A + \vec{F} \times \vec{r}_{AB}$$

3.2 Koncentrált erő tengelyre számított nyomatéka
a) tengely: irányított egyenes, egységvektora: $\vec{e}$; $|\vec{e}| = 1$, például A ponton áthaladó a tengely: $\vec{e}_a$. A tengely x, y és z tengelyekkel bezárt szöge rendre α_x, α_y és α_z, így

$$\vec{e}_a = \cos\alpha_x \vec{e}_x + \cos\alpha_y \vec{e}_y + \cos\alpha_z \vec{e}_z$$



A tengelyre számított nyomaték értelmezése: a P pontban támadó $\vec{F}$ erő a tengelyre számított nyomatéka:

$$M_a = \vec{M}_A \cdot \vec{e}_a = \left(\vec{r}_{AP} \times \vec{F}\right) \cdot \vec{e}_a \ \ [\mathrm{Nm}]$$

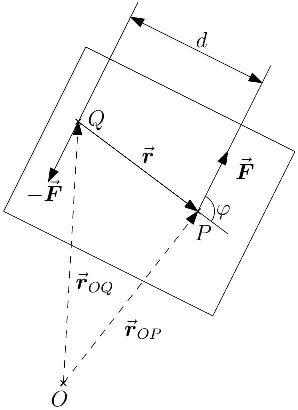
3. Merev testre ható erőrendszer

következmények:

- M_a az $\vec{\boldsymbol{M}}_A$ vektor merőleges vetülete az a tengelyre
- M_a nagysága nem függ az A pont megválasztásától:

$$M_a = \vec{\boldsymbol{M}}_{A'} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_a = \left(\vec{\boldsymbol{M}}_A + \vec{\boldsymbol{r}}_{A'A} \times \vec{\boldsymbol{F}}\right) \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_a = \vec{\boldsymbol{M}}_A \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_a + \underbrace{\left(\vec{\boldsymbol{r}}_{A'A} \times \vec{\boldsymbol{F}}\right) \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_a}_{=0} = \vec{\boldsymbol{M}}_A \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_a$$

- ha az erő hatásvonala metszi a tengelyt, akkor $M_a = 0$. Igazolás: A rajta van $\vec{\boldsymbol{F}}$ hatásvonalán és a-n is, tehát $\vec{\boldsymbol{M}}_A = \vec{\boldsymbol{0}} \;\Rightarrow\; M_a = 0$
- ha az erő párhuzamos az a tengellyel, akkor $M_a = 0$. Igazolás: mivel $\vec{\boldsymbol{M}}_A$ merőleges az $\vec{\boldsymbol{F}}$ erőre, így $\vec{\boldsymbol{M}}_A$ egyúttal merőleges $\vec{\boldsymbol{e}}_a$-ra is, így a két vektor skaláris szorzata 0-át ad: $\vec{\boldsymbol{M}}_A \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_a = 0$.



3.3 Az erőpár és nyomatéka

a) értelmezés: az erőpárt **két** párhuzamos hatásvonalú, azonos nagyságú, ellentétes irányú erővektor alkotja (a hatásvonalak nem esnek egybe, de egyetlen síkban vannak)

b) az erőpár eredője és nyomatéka

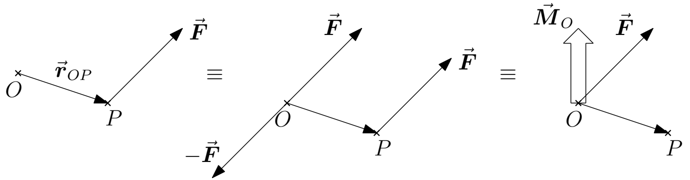
- eredő: $\vec{F} + \left(-\vec{F}\right) = \vec{0}$
- nyomaték a Q pontra: $\vec{M}_Q = \vec{r}_{QP} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} \neq \vec{0}$
- nyomaték a P pontra: $\vec{M}_P = \vec{r}_{PQ} \times \left(-\vec{F}\right) = \vec{r} \times \vec{F}$
- nyomaték a tetszőleges O pontra: $\vec{M}_O = \vec{r}_{OP} \times \vec{F} + \vec{r}_{OQ} \times \left(-\vec{F}\right) = (\vec{r}_{OP} - \vec{r}_{OQ}) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$

3. Merev testre ható erőrendszer

következmények:

- az erőpár nyomatéka a test/tér bármely pontjára ugyanakkora: $\vec{\boldsymbol{M}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}}$, nagysága: $|\vec{\boldsymbol{M}}| = |\vec{\boldsymbol{r}}||\vec{\boldsymbol{F}}| \sin\varphi = F \underbrace{\left(|\vec{\boldsymbol{r}}| \sin\varphi\right)}_{d} = Fd$
- az erőpár $\vec{\boldsymbol{M}}$ nyomatéka a test/tér bármely pontjába áthelyezhető
- ha ismert n db erőpár, akkor ezek n db nyomatékvektorral egyenértékűek: $\vec{\boldsymbol{M}}_1; \vec{\boldsymbol{M}}_2; \ldots; \vec{\boldsymbol{M}}_n$, amelyek összegezhetők, így az eredő nyomaték: $\vec{\boldsymbol{M}} = \vec{\boldsymbol{M}}_1 + \vec{\boldsymbol{M}}_2 + \ldots + \vec{\boldsymbol{M}}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\boldsymbol{M}}_i$ [Nm]

3.4 Koncentrált erők áthelyezése másik pontba: redukálás

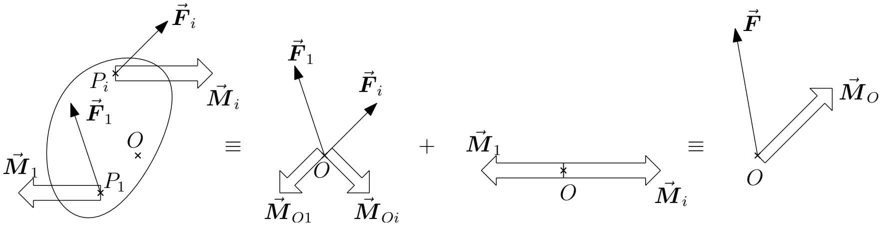


a) a redukált vektorkettős fogalma: a P pontban támadó $\vec{F}$ erő O pontba redukált vektorkettőse az $\left(\vec{F};\vec{M}_O\right)_O$ erő és nyomatékvektor, ahol $\vec{M}_O = \vec{r}_{OP} \times \vec{F}$ [Nm]; és $\vec{M}_O$ merőleges az $\vec{F}$-re.
b) a redukálás megfordítása: ha ismert a tetszőleges O pontban egy egymásra merőleges $\vec{F} \perp \vec{M}_O$ erő és nyomaték, akkor léteznek olyan pontok, amelyekben az $\vec{F}$, $\vec{M}_O$ csak az $\vec{F}$ erővel helyettesíthető. Ezeknek a pontoknak a mértani helye egy egyenes, amely párhuzamos az $\vec{F}$ erővel és átmegy P-n. Egyenlete

$$(\vec{r} - \vec{r}_{OP}) \times \vec{F} = \vec{0} \quad \text{ahol} \quad \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

Ez az egyenes az ún. centrális egyenes.

3.5 A merev testre ható általános ER redukált vektorkettőse
statikai egyenértékűség:



Tehát adott a P_i pontokban támadó $\vec{F}_i$, $\vec{M}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ általános ER.

3. Merev testre ható erőrendszer

a) az általános ER O pontba redukált vektorkettőse
$\vec{\boldsymbol{F}}_i$, $\vec{\boldsymbol{M}}_i$ áthelyezése P_i-ből O-ba: $\vec{\boldsymbol{F}}_i$, $\vec{\boldsymbol{M}}_{Oi} = \vec{\boldsymbol{r}}_{OP} \times \vec{\boldsymbol{F}}_i$ és $\vec{\boldsymbol{M}}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$
Ezekkel az ER O pontba redukált vektorkettőse:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{F}}_1 + \vec{\boldsymbol{F}}_2 + \ldots + \vec{\boldsymbol{F}}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\boldsymbol{F}}_i$$

$$\vec{\boldsymbol{M}}_O = \vec{\boldsymbol{r}}_{OP_1} \times \vec{\boldsymbol{F}}_1 + \ldots + \vec{\boldsymbol{r}}_{OP_n} \times \vec{\boldsymbol{F}}_n + \vec{\boldsymbol{M}}_1 + \ldots + \vec{\boldsymbol{M}}_n = \sum_{i=1} \left(\vec{\boldsymbol{r}}_{OP_i} \times \vec{\boldsymbol{F}}_i + \vec{\boldsymbol{M}}_i\right)$$

következmény: a testre ható bármely általános ER helyettesíthető egy erővel és egy nyomatékkal: $\left(\vec{\boldsymbol{F}}; \vec{\boldsymbol{M}}_O\right)_O$ az ER O pontba redukált vektorkettőse
b) a redukált vektorkettős az $A \neq O$ pontban
eredő: $\vec{\boldsymbol{F}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\boldsymbol{F}}_i$
nyomaték: $\vec{\boldsymbol{M}}_A = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{\boldsymbol{r}}_{AP_i} \times \vec{\boldsymbol{F}}_i + \vec{\boldsymbol{M}}_i\right) \neq \vec{\boldsymbol{M}}_O$
$\vec{\boldsymbol{M}}_A$ kiszámítása $\vec{\boldsymbol{M}}_O$ ismeretében: $\vec{\boldsymbol{M}}_A = \vec{\boldsymbol{M}}_O + \vec{\boldsymbol{r}}_{AO} \times \vec{\boldsymbol{F}}$ (lásd 3.1 b))

3. Merev testre ható erőrendszer

c) statikai egyenértékűség: a merev testre ható általános ER $\left(\vec{\boldsymbol{F}}_i; \vec{\boldsymbol{M}}_i;\ i = 1, \ldots, n\right)$ statikailag egyenértékű egy tetszőleges pontban az odaredukált vektorkettősével $\left(\vec{\boldsymbol{F}}; \vec{\boldsymbol{M}}_O\right)_O$ (**egy** erővel és **egy** nyomatékkal)

d) két különböző ER egyenértékűsége

- a merev testre hat két ER:
  1. ER: $\vec{\boldsymbol{F}}_i; \vec{\boldsymbol{M}}_i;\ i = 1, \ldots, n$
  2. ER: $\vec{\boldsymbol{F}}_j; \vec{\boldsymbol{M}}_j;\ j = 1, \ldots, m$
- redukált vektorkettőseik ugyanabba az O pontba:
  1. ER: $\left(\vec{\boldsymbol{F}}; \vec{\boldsymbol{M}}_O\right)_O$
  2. ER: $\left(\vec{\boldsymbol{F}}'; \vec{\boldsymbol{M}}'_O\right)_O$
- a két ER statikailag egyenértékű, ha a redukált vektorkettősük azonos egymással:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{F}}' : \quad \left\{ \begin{array}{l} F_x = F'_x \\ F_y = F'_y \\ F_z = F'_z \end{array} \right. \qquad \text{3 db skaláris vagy vetületi egyenlet}$$

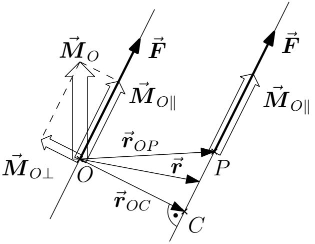
$$\vec{\boldsymbol{M}}_O = \vec{\boldsymbol{M}}'_O : \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{Ox} = M'_{Ox} \\ M_{Oy} = M'_{Oy} \\ M_{Oz} = M'_{Oz} \end{array} \right. \qquad \text{3 db skaláris nyomatéki egyenlet}$$

3. Merev testre ható erőrendszer

3.6 Merev testre ható általános ER centrális egyenese

a) értelmezés: a P_i pontokban támadó $\vec{F}_i; \vec{M}_i;\ i = 1, \dots, n$ általános ER **centrális egyenese** azon pontok mértani helye, amelyekben az ER eredőjével és egy vele párhuzamos nyomatékkal helyettesíthető

b) a centrális egyenes egyenlete



- O pontba redukált vektorkettős: $\left(\vec{F}; \vec{M}_O\right)_O$
- az $\vec{M}_O$ nyomaték $\vec{F}$-fel párhuzamos és $\vec{F}$-re merőleges összetevője:

$$\vec{M}_{O\|} = \frac{1}{F^2}\left(\vec{F} \cdot \vec{M}_O\right) \cdot \vec{F}$$

$$\vec{M}_{O\perp} = \frac{1}{F^2}\left(\vec{F} \times \vec{M}_O\right) \times \vec{F} = \vec{M}_O - \vec{M}_{O\|}$$

- 3.4 b) alapján: $\vec{M}_{O\perp}$ és $\vec{F}$ helyettesíthető egy P ponton átmenő egyenes mentén egyetlen $\vec{F}$ erővel, az $\vec{M}_{O\|}$ vektort pedig áthelyezzük az egyenes P pontjába, így a **centrális egyenes** egyenlete: $(\vec{r} - \vec{r}_{OP}) \times \vec{F} = \vec{0}$. Másik alak: $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_{O\perp}$, $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

3. Merev testre ható erőrendszer

c) a centrális egyenes O ponthoz legközelebb eső C pontja:
egyenlet:

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{OC} \times \vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{M}}_{O\perp} \quad (\vec{\boldsymbol{r}} \to \vec{\boldsymbol{r}}_{OC})$$

$$\vec{\boldsymbol{F}} \times \left(\vec{\boldsymbol{r}}_{OC} \times \vec{\boldsymbol{F}}\right) = \vec{\boldsymbol{F}} \times \vec{\boldsymbol{M}}_{O\perp}$$

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{OC} \underbrace{\left(\vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}\right)}_{F^2} - \vec{\boldsymbol{F}} \underbrace{\left(\vec{\boldsymbol{F}} \cdot \vec{\boldsymbol{r}}_{OC}\right)}_{0} = \vec{\boldsymbol{F}} \times \vec{\boldsymbol{M}}_O$$

$$\vec{\boldsymbol{r}}_{OC} = \frac{1}{F^2} \vec{\boldsymbol{F}} \times \vec{\boldsymbol{M}}_O \ \ \text{[m]} \quad \left(|\vec{\boldsymbol{r}}_{OC}| = d \text{ az } \vec{\boldsymbol{F}} \text{ erő karja}\right)$$

a centrális egyenes egyenlete $\vec{r}_{OC}$ ismeretében:

$$\vec{\boldsymbol{F}} \times (\vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_{OC}) = \vec{\boldsymbol{0}}$$

3. Merev testre ható erőrendszer

d) speciális esetek, az ER-ek osztályozása:

- $\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\mathbf{0}}$; $\vec{\boldsymbol{M}}_O = \vec{\mathbf{0}}$ egyensúlyi ER $\rightarrow$ Statika
- $\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\mathbf{0}}$; $\vec{\boldsymbol{M}}_O \neq \vec{\mathbf{0}}$ egyetlen erőpár
- $\vec{\boldsymbol{F}} \neq \vec{\mathbf{0}}$; $\vec{\boldsymbol{M}}_O \perp \vec{\boldsymbol{F}}$ az ER centrális egyenesében egyetlen erővel, az $\vec{\boldsymbol{F}}$-fel helyettesíthető
- $\vec{\boldsymbol{F}} \neq \vec{\mathbf{0}}$; $\vec{\boldsymbol{M}}_O \angle \vec{\boldsymbol{F}}$ általános eset: erőcsavar a centrális egyenes mentén

3.7 Merev testre ható egyensúlyi ER, és a test tartós nyugalma

a) értelmezés: a P_i pontban ható $\vec{\boldsymbol{F}}_i$; $\vec{\boldsymbol{M}}_i$; $i = 1, \dots, n$ általános ER egyensúlyi ER, ha a test vagy a tér egy tetszőleges pontjában a redukált vektorkettős zérus, vagyis

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\boldsymbol{F}}_i = \vec{\boldsymbol{0}} \quad \begin{cases} \vec{\boldsymbol{e}}_x : & F_x = \sum\limits_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \\ \vec{\boldsymbol{e}}_y : & F_y = \sum\limits_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \\ \vec{\boldsymbol{e}}_z : & F_z = \sum\limits_{i=1}^{n} F_{iz} = 0 \end{cases} \quad \text{3 db skaláris erőegyensúlyi egyenlet}$$

$$\vec{\boldsymbol{M}}_O = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{\boldsymbol{r}}_{OP_i} \times \vec{\boldsymbol{F}}_i + \vec{\boldsymbol{M}}_i \right) = \vec{\boldsymbol{0}} \quad \begin{cases} \vec{\boldsymbol{e}}_x : & M_{Ox} = 0 \\ \vec{\boldsymbol{e}}_y : & M_{Oy} = 0 \\ \vec{\boldsymbol{e}}_z : & M_{Oz} = 0 \end{cases} \quad \text{3 db skaláris nyomatéki egyenlet}$$

összesen 6 db egyenlet. Ha az O pontban zérus a redukált vektorkettős, akkor a test/tér bármely pontjában zérus: áthelyezés O-ból A-ba:

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{0}}$$

$$\vec{\boldsymbol{M}}_A = \underbrace{\vec{\boldsymbol{M}}_O}_{\vec{\boldsymbol{0}}} + \vec{\boldsymbol{r}}_{AO} \times \underbrace{\vec{\boldsymbol{F}}}_{\vec{\boldsymbol{0}}} = \vec{\boldsymbol{0}}$$

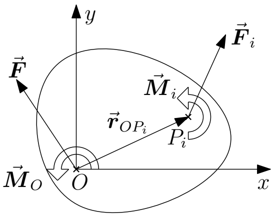
3. Merev testre ható erőrendszer

b) a merev test tartós nyugalma:
A statika alaptétele: egy merev test csak akkor lehet tartós nyugalomban, ha a testre ható külső ER egyensúlyi

- az egyensúlyi ER szükséges feltétel a tartós nyugalomhoz, a merevtestszerű mozgást (eltolódás és forgás) a támasztó ER-nek meg kell akadályozni
- a külső ER: terhelés (adott) és a támasztásoknál fellépő támasztó ER (keresett)

3.8 Merev testre ható speciális ER-ek egyensúlya

a) síkbeli erőrendszerek

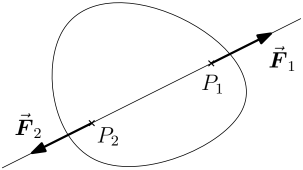


ismert: P_i, $\vec{F}_i$, $\vec{M}_i$, $i = 1, \ldots, n$ síkbeli ER, most $\vec{F}_i = F_{ix}\vec{e}_x + F_{iy}\vec{e}_y$, $\vec{M}_i = M_i\vec{e}_z$

- az ER O pontba redukált vektorkettőse:
  $$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = F_x\vec{e}_x + F_y\vec{e}_y,$$
  $$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_{OP_i} \times \vec{F}_i + \vec{M}_i\right) = M_O\vec{e}_z$$
- egyensúlyi ER
  $$\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} F_x = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 \\ F_y = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0 \end{cases}$$
  $$\vec{M}_O = \vec{0} \Rightarrow M_O = 0$$
- centrális egyenes: $\vec{M}_O \perp \vec{F}$ mindig fennáll, ezért az ER egyetlen erővel, az $\vec{F}$ eredővel helyettesíthető a centrális egyenesben

3. Merev testre ható erőrendszer

b) merev testre ható két erő egyensúlya

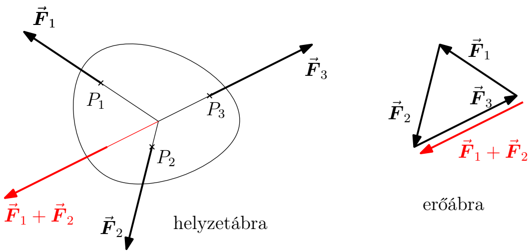


adott: P_1; $\vec{F}_1$, keresett: P_2; $\vec{F}_2$ úgy, hogy az ER egyensúlyi legyen
egyensúlyi ER: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$,
$\vec{M}_O = \vec{0}$ bármely pontra.

következmény: P_2 rajta van az $\vec{F}_1$ hatásvonalán (bárhol), $\vec{F}_2$ pedig $\vec{F}_1$ nagyságával azonos, de ellentétes irányú

3. Merev testre ható erőrendszer

c) merev testre ható három nem párhuzamos erő egyensúlya



adott: P_1; $\vec{F}_1$; P_2; $\vec{F}_2$; keresett: P_3; $\vec{F}_3$, ha ez ER egyensúlyi

egyensúlyi ER: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_3 = -\left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right)$

$\vec{M}_O = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_3$ hatásvonala azonos $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ hatásvonalával

következmény:

- azonos síkban vannak
- hatásvonalaik egyetlen pontban metsződnek
- eredőjük zérus kell legyen $\rightarrow$ erőábrában nyílfolyam folytonos

3. Merev testre ható erőrendszer

d) három párhuzamos erő egyensúlya
adott: P_1 (x_1); $\vec{\boldsymbol{F}}_1$; P_2 (x_2); $\vec{\boldsymbol{F}}_2$,
keresett: P_3 (x_3); $\vec{\boldsymbol{F}}_3$, ha az ER egyensúlyi
egyensúlyi ER: $\vec{\boldsymbol{F}}_1 + \vec{\boldsymbol{F}}_2 + \vec{\boldsymbol{F}}_3 = \vec{\boldsymbol{0}} \Rightarrow$
$\vec{\boldsymbol{F}}_3 = -\left(\vec{\boldsymbol{F}}_1 + \vec{\boldsymbol{F}}_2\right) = -(F_1 + F_2)\,\vec{\boldsymbol{e}}_y$
$\vec{\boldsymbol{M}}_O = \vec{\boldsymbol{0}} = F_1 x_1 \vec{\boldsymbol{e}}_z + F_2 x_2 \vec{\boldsymbol{e}}_z - F_3 x_3 \vec{\boldsymbol{e}}_z$
$x_3 = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2}{F_1 + F_2}$; $F_3 = F_1 + F_2$
megoldás másként x_3-ra:
nyomatéki egyenlet a $Q(x_3; 0)$ pontra
$\vec{\boldsymbol{M}}_Q = -F_1 a \vec{\boldsymbol{e}}_z + F_2 b \vec{\boldsymbol{e}}_z = \vec{\boldsymbol{0}} \Rightarrow F_1 a = F_2 b$
$\frac{F_1}{F_2} = \frac{b}{a}$
$a = x_3 - x_1$; $b = x_2 - x_3$