Matematikai összefoglaló

1. Vektorműveletek

1.1. Vektorok értelmezése, megadása

A vektorok irányított szakaszok, melyeknek ennek megfelelően iránya, nagysága és támadáspontja van. Ezeket valamilyen koordináta-rendszerben (KR) adjuk meg. A továbbiakban alapvetően a Descartes-i derékszögű koordináta-rendszert (DDKR) fogjuk használni, melynek megadásához egységnyi hosszúságú ún. bázisvektorokat definiálunk, ezek $\vec{\boldsymbol{e}}_x$, $\vec{\boldsymbol{e}}_y$ és $\vec{\boldsymbol{e}}_z$. Ezek a vektorok egymásra kölcsönösen merőlegesek és jobbsodrásúak. Egy tetszőleges vektort a KR-ben annak 3 koordinátája és a bázisvektorok által képzett lineáris kombinációval adjuk meg (az adott koordinátát a hozzá tartozó egységvektorral összeszorozzuk, ezeket a szorzatokat pedig összeadjuk), vagyis egy tetszőleges $\vec{\boldsymbol{a}}$ vektor megadása a következő

$$\vec{\boldsymbol{a}} = a_x\vec{\boldsymbol{e}}_x + a_y\vec{\boldsymbol{e}}_y + a_z\vec{\boldsymbol{e}}_z. \tag{1}$$

Egy tetszőleges vektor hosszát a koordináták négyzetösszegéből vont négyzetgyök segítségével tudjuk meghatározni

$$a = |\vec{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{2}$$

Látható, hogy ezt többféleképpen is jelölhetjük, vagy elhagyjuk a vektorjelet, vagy a vektort abszolút értékbe tesszük, mindkét jelölés helyes. Ha szeretnénk meghatározni egy vektor egységvektorát, a vektort el kell osztani a hosszával

$$\vec{\boldsymbol{e}}_a = \frac{\vec{\boldsymbol{a}}}{|\vec{\boldsymbol{a}}|}. \tag{3}$$

Példa: Legyen adott az $\vec{\boldsymbol{r}} = 8\vec{\boldsymbol{e}}_x - 3\vec{\boldsymbol{e}}_y + 5\vec{\boldsymbol{e}}_z$ m helyvektor. Határozzuk meg a vektor hosszát, majd számítsuk ki az egységvektorát! A (2) egyenlet alapján a vektor hossza

$$r = |\vec{\boldsymbol{r}}| = \sqrt{8^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{98} = 9{,}899 \text{ m}. \tag{4}$$

A (3) egyenlet pedig az egységvektor számítását teszi lehetővé, vagyis

$$\vec{\boldsymbol{e}}_r = \frac{\vec{\boldsymbol{r}}}{|\vec{\boldsymbol{r}}|} = \frac{8\vec{\boldsymbol{e}}_x - 3\vec{\boldsymbol{e}}_y + 5\vec{\boldsymbol{e}}_z \text{ m}}{9{,}899 \text{ m}} = 0{,}808\vec{\boldsymbol{e}}_x - 0{,}303\vec{\boldsymbol{e}}_y + 0{,}505\vec{\boldsymbol{e}}_z. \tag{5}$$

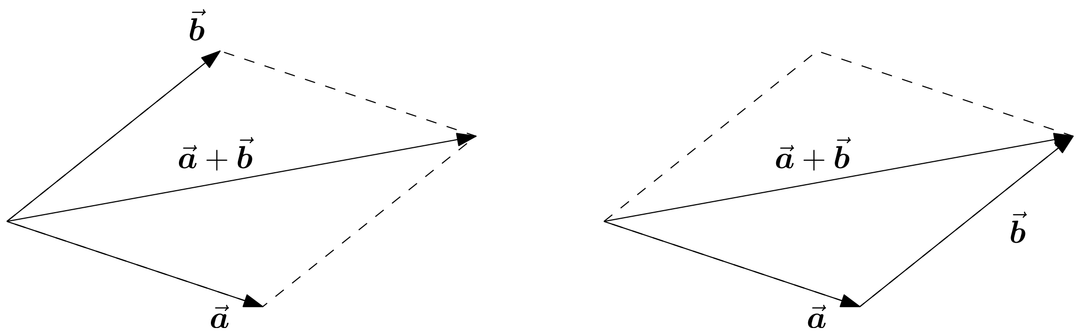
Ez utóbbiból jól látszik, hogy az egységvektornak nincs mértékegysége, más szóval dimenziótlan mennyiség. Gyakorlásként ki lehet számolni az egységvektor hosszát is, a kerekítési pontatlanságok miatt az eredmény közel 1-gyel kell megegyezzen (természetesen ha az értékeket pontosan helyettesítjük be, épp 1 lesz a vektor hossza).

1.2. Vektorok összeadása

Két vektort úgy adunk össze, hogy a megfelelő koordinátáikat összeadjuk

$$\vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}} = \underbrace{(a_x + b_x)}_{c_x}\vec{\boldsymbol{e}}_x + \underbrace{(a_y + b_y)}_{c_y}\vec{\boldsymbol{e}}_y + \underbrace{(a_z + b_z)}_{c_z}\vec{\boldsymbol{e}}_z. \tag{6}$$

Geometriailag két módon tudjuk a vektorokat összeadni (1. ábra). Az egyik módszer, hogy közös kezdőpontba toljuk a két vektort önmagukkal párhozamosan, majd kiegészítjük őket egy paralelogrammává (a 1. ábrán szaggatottal jelölt alakzat, bal oldali ábra), és a közös kezdőpontból kiinduló átló lesz az összegvektor. A másik lehetőség, hogy az $\vec{\boldsymbol{a}}$ vektor végpontjába toljuk a $\vec{\boldsymbol{b}}$ vektor kezdőpontját. Az összegvektor így az $\vec{\boldsymbol{a}}$ kezdőpontjából a $\vec{\boldsymbol{b}}$ végpontjába mutató vektor lesz (a 1. ábrán a jobb oldali ábra), mely ugyanazt az összegvektort jelenti, mint az első módszer esetében.



1. ábra. Az $\vec{\boldsymbol{a}}$ és $\vec{\boldsymbol{b}}$ vektorok összege.

1.3. Vektorok különbsége

Két vektor különbségének kiszámítása ugyanúgy történik, mint az összeadása

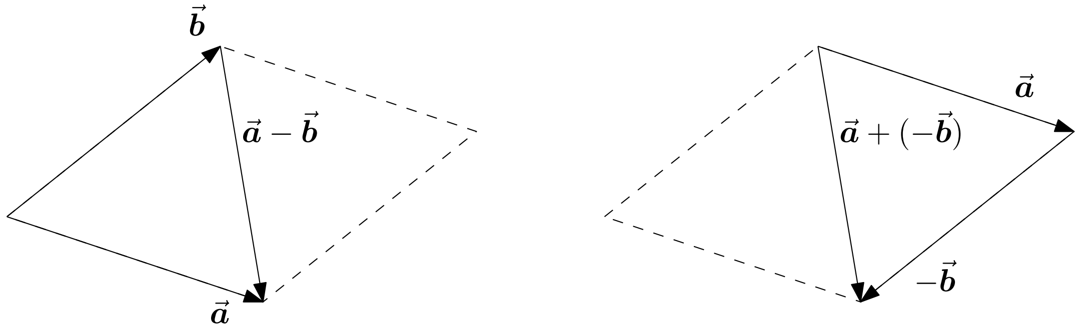
$$\vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{a}} - \vec{\boldsymbol{b}} = \underbrace{(a_x - b_x)}_{c_x}\vec{\boldsymbol{e}}_x + \underbrace{(a_y - b_y)}_{c_y}\vec{\boldsymbol{e}}_y + \underbrace{(a_z - b_z)}_{c_z}\vec{\boldsymbol{e}}_z. \tag{7}$$

Geometriailag itt is két módszer áll a rendelkezésünkre (2. ábra). Az egyik lehetőség, hogy közös kezdőpontba toljuk a két vektort, és a különbségben második helyen álló vektor (kivonandó vektor, itt $\vec{\boldsymbol{b}}$) végpontjából az első helyen álló vektor (kisebbítendő vektor, itt $\vec{\boldsymbol{a}}$) végpontjába mutató vektor lesz a különbségvektor (2. ábra bal oldali ábrája). A másik lehetőség, hogy felvesszük a $-\vec{\boldsymbol{b}}$ vektort, és az előző pontban ismertetett módon hozzáadjuk az $\vec{\boldsymbol{a}}$ vektorhoz (2. ábrán jobb oldalon).

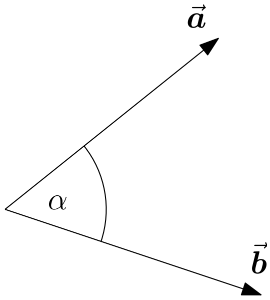
1.4. Skaláris szorzás

Definíció szerint két vektor skaláris szorzata a következő kifejezést jelenti

$$\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} = |\vec{\boldsymbol{a}}||\vec{\boldsymbol{b}}| \cos\alpha = \lambda, \tag{8}$$



2. ábra. Két vektor különbségének ábrázolása.



3. ábra. Az $\vec{\boldsymbol{a}}$ és $\vec{\boldsymbol{b}}$ vektorok ábrázolása.

ahol α a két vektor által bezárt szög (3. ábra). A skalárszorzás jele $\cdot$, eredménye pedig egy skalár szám (itt λ). A definícióból következik, hogy ha két vektor párhuzamos egymással, vagyis a közbezárt szögük zérus ($\alpha = 0$), akkor a skalárszorzás eredménye épp a két vektor hosszának szorzata lesz (mivel $\cos 0° = 1$, így $\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}} = |\vec{\boldsymbol{a}}||\vec{\boldsymbol{b}}|\cdot 1 = ab$). Ebből következik, hogy két azonos bázisvektor szorzata éppen 1-et ad ($\vec{\boldsymbol{e}}_x \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_x = |\vec{\boldsymbol{e}}_x||\vec{\boldsymbol{e}}_x| \cos 0° = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$). Ha két tetszőleges vektor épp merőleges egymásra (vagyis $\alpha = 90°$), akkor a skalárszorzatuk eredménye 0 (mivel $\cos 90° = 0$, ezért $\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}} = |\vec{\boldsymbol{a}}||\vec{\boldsymbol{b}}|\cdot 0 = 0$). Következmény, hogy két különböző bázisvektor skaláris szorzata szintén zérus, mivel páronként merőlegesek egymásra (például $\vec{\boldsymbol{e}}_y \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_z = |\vec{\boldsymbol{e}}_y||\vec{\boldsymbol{e}}_z| \cos 90° = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$). További tulajdonsága a skalárszorzásnak, hogy kommutatív, vagyis a szorzás tagjai felcserélhetőek, az eredmény ugyanaz marad ($\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{a}} = \lambda$). Ha szeretnénk két vektor skaláris szorzatát kiszámítani a koordinátáik ismeretében, azt a következőképp tehetjük meg

$$
\begin{gathered}
\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} = (a_x\vec{\boldsymbol{e}}_x + a_y\vec{\boldsymbol{e}}_y + a_z\vec{\boldsymbol{e}}_z) \cdot (b_x\vec{\boldsymbol{e}}_x + b_y\vec{\boldsymbol{e}}_y + b_z\vec{\boldsymbol{e}}_z) = \\
= a_xb_x \underbrace{\vec{\boldsymbol{e}}_x \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_x}_{1} + a_xb_y \underbrace{\vec{\boldsymbol{e}}_x \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_y}_{0} + a_xb_z \underbrace{\vec{\boldsymbol{e}}_x \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_z}_{0} + a_yb_x \underbrace{\vec{\boldsymbol{e}}_y \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_x}_{0} + a_yb_y \underbrace{\vec{\boldsymbol{e}}_y \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_y}_{1} + a_yb_z \underbrace{\vec{\boldsymbol{e}}_y \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_z}_{0} + \\
+ a_zb_x \underbrace{\vec{\boldsymbol{e}}_z \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_x}_{0} + a_zb_y \underbrace{\vec{\boldsymbol{e}}_z \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_y}_{0} + a_zb_z \underbrace{\vec{\boldsymbol{e}}_z \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_z}_{1} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = \lambda,
\end{gathered}
\tag{9}
$$

tehát a megfelelő koordinátákat összeszorozzuk, a szorzatokat pedig összeadjuk.
Példa: Legyen adott két vektor: $\vec{\boldsymbol{c}} = 6\vec{\boldsymbol{e}}_x + 8\vec{\boldsymbol{e}}_z$ m, $\vec{\boldsymbol{d}} = 5\vec{\boldsymbol{e}}_y + 12\vec{\boldsymbol{e}}_z$ m. Határozzuk meg a

skalár szorzatukat és a közbezárt szögüket! A (9) egyenletet kihasználva

$$\lambda = \vec{\boldsymbol{c}} \cdot \vec{\boldsymbol{d}} = 6 \cdot 0 + 0 \cdot 5 + 8 \cdot 12 = 96 \text{ m}^2. \tag{10}$$

Mivel az eredmény nem 0, ebből következik, hogy a két vektor biztosan nem merőleges egymásra. Hogy mégis mekkora szöget zárnak be egymással, azt a (8) egyenlet átrendezésével kapjuk

$$\cos\alpha = \frac{\vec{\boldsymbol{c}} \cdot \vec{\boldsymbol{d}}}{|\vec{\boldsymbol{c}}||\vec{\boldsymbol{d}}|} = \frac{96 \text{ m}^2}{\sqrt{6^2+8^2}\sqrt{5^2+12^2} \text{ m}^2} = \frac{96}{10 \cdot 13} = 0{,}738, \tag{11}$$

ebből pedig a szög $\alpha = 42{,}399°$.
Példa: Állapítsuk meg, hogy az $\vec{\boldsymbol{a}} = 10\vec{\boldsymbol{e}}_y + 24\vec{\boldsymbol{e}}_z$ valamint a $\vec{\boldsymbol{b}} = -12\vec{\boldsymbol{e}}_y + 5\vec{\boldsymbol{e}}_z$ vektorok merőlegesek-e egymásra! Ehhez megint számítsuk ki a skalár szorzatukat

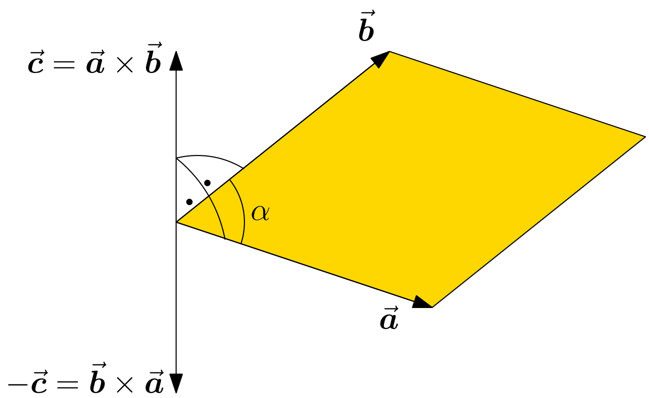
$$\lambda = \vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} = 0 \cdot 0 + 10 \cdot (-12) + 24 \cdot 5 = -120 + 120 = 0. \tag{12}$$

Mivel a skalárszorzat értéke 0 lett, ezért a két vektor merőleges egymásra.

1.5. Vektoriális szorzás

Két vektor között a vektoriális szorzást a $\times$ (ejtsd: kereszt) jelöli. Két vektor vektoriális szorzatának eredménye szintén vektor lesz

$$\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{c}}. \tag{13}$$



4. ábra. A vektorszorzás értelmezése, eredménye.

Az eredményvektor merőleges a két összeszorzott vektor által kifeszített síkra (4. ábrán sárgával jelölt sík), és a szorzás sorrendjében haladva jobbsodrású rendszert alkotnak. Emiatt a vektorszorzás NEM kommutatív, vagyis a tagok felcserélésével nem ugyanazt az eredményt kapjuk ($\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = -\vec{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{a}}$). Az eredményvektor hosszát kifejezve a következő összefüggés áll fenn

$$|\vec{\boldsymbol{c}}| = |\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}| = |\vec{\boldsymbol{a}}||\vec{\boldsymbol{b}}| \sin\alpha. \tag{14}$$

Ez alapján ha a két vektor párhozamos egymással, vektorszorzásuk eredménye nullvektort eredményez (vagyis $\alpha = 0$, tehát $|\vec{\boldsymbol{c}}| = |\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}| = |\vec{\boldsymbol{a}}||\vec{\boldsymbol{b}}| \sin 0° = 0$, tehát az eredményvektor hossza 0). Ha a két vektor merőleges egymásra, az eredményvektor hossza épp a két vektor hosszának szorzata lesz (vagyis $\alpha = 90°$, tehát $|\vec{\boldsymbol{c}}| = |\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}| = |\vec{\boldsymbol{a}}||\vec{\boldsymbol{b}}| \sin 90° = |\vec{\boldsymbol{a}}||\vec{\boldsymbol{b}}| = ab$). Ezek alapján a DDKR bázisvektorainak vektorszorzatai a következő eredményeket adják. Ha két azonos egységvektort szorzunk össze vektoriálisan (mivel egy vektor önmagával párhozamos), ezért annak az eredménye nullvektor lesz (például $\vec{\boldsymbol{e}}_x \times \vec{\boldsymbol{e}}_x = \vec{\boldsymbol{0}}$). Ha két különböző, vagyis egymásra merőleges egységvektort szorzunk össze vektoriálisan, az eredmény hossza egységnyi (például $|\vec{\boldsymbol{e}}_y \times \vec{\boldsymbol{e}}_z| = |\vec{\boldsymbol{e}}_y||\vec{\boldsymbol{e}}_z| \sin 90° = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$), és merőleges kell legyen a két vektorra (mivel jobbsodrású rendszert alkotnak a bázisvektorok, és a vektorszorzás két vektora valamint az eredmény is, ezért két különböző egységvektor vektorszorzata a harmadikat adja eredményül pozitív előjellel, ha a jobbsodrásnak megfelelően szorozzuk őket össze, és negatív előjellel, ha a jobbsodrással ellentétes irányban szorozzuk őket össze). Tehát két különböző egységvektor szorzásából a következő eredményeket kapjuk

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{e}}_x \times \vec{\boldsymbol{e}}_y &= \vec{\boldsymbol{e}}_z, & \vec{\boldsymbol{e}}_y \times \vec{\boldsymbol{e}}_x &= -\vec{\boldsymbol{e}}_z, \\ \vec{\boldsymbol{e}}_y \times \vec{\boldsymbol{e}}_z &= \vec{\boldsymbol{e}}_x, & \vec{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{e}}_y &= -\vec{\boldsymbol{e}}_x, \\ \vec{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{e}}_x &= \vec{\boldsymbol{e}}_y, & \vec{\boldsymbol{e}}_x \times \vec{\boldsymbol{e}}_z &= -\vec{\boldsymbol{e}}_y. \end{aligned} \tag{15}$$

Két vektor vektorszorzatát többféleképp ki lehet számítani, mi itt két módszert fogunk ismertetni. Az első a determináns kifejtéses módszer. Praktikusan ez azt jelenti, hogy képezünk egy 3×3-as determinánst, melynek első sorában a bázisvektorokat vesszük fel, a második sorában a vektorszorzás első tagjának koordinátáit, a harmadik sorban a vektorszorzás második tagjának koordinátáit, majd ezt a determinánst kifejtjük az első sora szerint. Nevezetesen

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} &= \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}_x & \vec{\boldsymbol{e}}_y & \vec{\boldsymbol{e}}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \\ &= \vec{\boldsymbol{e}}_x(a_y b_z - a_z b_y) - \vec{\boldsymbol{e}}_y(a_x b_z - a_z b_x) + \vec{\boldsymbol{e}}_z(a_x b_y - a_y b_x). \end{aligned} \tag{16}$$

A második módszer pedig a (15) egyenleteken alapul. A két vektort leírjuk egymás mellé, és minden tagot minden taggal összeszorzunk, majd egyszerűsítünk, amit lehet

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} &= (a_x \vec{\boldsymbol{e}}_x + a_y \vec{\boldsymbol{e}}_y + a_z \vec{\boldsymbol{e}}_z) \times (b_x \vec{\boldsymbol{e}}_x + b_y \vec{\boldsymbol{e}}_y + b_z \vec{\boldsymbol{e}}_z) = \\ = a_x b_x \underbrace{\vec{\boldsymbol{e}}_x \times \vec{\boldsymbol{e}}_x}_{\vec{\boldsymbol{0}}} &+ a_x b_y \underbrace{\vec{\boldsymbol{e}}_x \times \vec{\boldsymbol{e}}_y}_{\vec{\boldsymbol{e}}_z} + a_x b_z \underbrace{\vec{\boldsymbol{e}}_x \times \vec{\boldsymbol{e}}_z}_{-\vec{\boldsymbol{e}}_y} + a_y b_x \underbrace{\vec{\boldsymbol{e}}_y \times \vec{\boldsymbol{e}}_x}_{-\vec{\boldsymbol{e}}_z} + a_y b_y \underbrace{\vec{\boldsymbol{e}}_y \times \vec{\boldsymbol{e}}_y}_{\vec{\boldsymbol{0}}} + \\ + a_y b_z \underbrace{\vec{\boldsymbol{e}}_y \times \vec{\boldsymbol{e}}_z}_{\vec{\boldsymbol{e}}_x} &+ a_z b_x \underbrace{\vec{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{e}}_x}_{\vec{\boldsymbol{e}}_y} + a_z b_y \underbrace{\vec{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{e}}_y}_{-\vec{\boldsymbol{e}}_x} + a_z b_z \underbrace{\vec{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{e}}_z}_{\vec{\boldsymbol{0}}} = \\ &= \vec{\boldsymbol{e}}_x(a_y b_z - a_z b_y) - \vec{\boldsymbol{e}}_y(a_x b_z - a_z b_x) + \vec{\boldsymbol{e}}_z(a_x b_y - a_y b_x), \end{aligned} \tag{17}$$

így ugyanazt az eredményt kaptuk, mint a (16) egyenletben. A mechanika oktatásban mi általában ez utóbbi módszert szoktuk használni, mivel alapvetően kevesebb, vagy ugyanannyi munkával és idővel ugyanúgy eredményre vezet, mint a determináns kifejtése. Még egy fontos tulajdonság az eredményvektor hosszát tekintve, hogy ennek a hossznak a mérőszáma megegyezik a két vektor által kifeszített paralelogramma területével (4. ábrán sárgával jelölt síkidom)

$$|\vec{\boldsymbol{c}}| = |\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}| = ab \sin \alpha = T. \tag{18}$$

Példa: Legyen adott két vektor: $\vec{\boldsymbol{a}} = 3\vec{\boldsymbol{e}}_x - 5\vec{\boldsymbol{e}}_y + 6\vec{\boldsymbol{e}}_z$ m; $\vec{\boldsymbol{b}} = 2\vec{\boldsymbol{e}}_x - 4\vec{\boldsymbol{e}}_z$ m. Határozzuk meg az $\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}$ vektorszorzatot, az $\vec{\boldsymbol{a}}$ és $\vec{\boldsymbol{b}}$ vektorok által kifeszített paralelogramma területét és a közbezárt szögüket! Számítsuk ki a $\vec{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{a}}$ vektorszorzat eredményét is! A (17) egyenletben ismertetett módon a következőket írhatjuk (a zérussal egyenlő tagokat már nem írjuk ki)

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} &= (3\vec{\boldsymbol{e}}_x - 5\vec{\boldsymbol{e}}_y + 6\vec{\boldsymbol{e}}_z) \times (2\vec{\boldsymbol{e}}_x - 4\vec{\boldsymbol{e}}_z) = \\ = 3 \cdot (-4) \underbrace{\vec{\boldsymbol{e}}_x \times \vec{\boldsymbol{e}}_z}_{-\vec{\boldsymbol{e}}_y} &+ (-5) \cdot 2 \underbrace{\vec{\boldsymbol{e}}_y \times \vec{\boldsymbol{e}}_x}_{-\vec{\boldsymbol{e}}_z} + (-5) \cdot (-4) \underbrace{\vec{\boldsymbol{e}}_y \times \vec{\boldsymbol{e}}_z}_{\vec{\boldsymbol{e}}_x} + 6 \cdot 2 \underbrace{\vec{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{e}}_x}_{\vec{\boldsymbol{e}}_y} = \\ &= 20\vec{\boldsymbol{e}}_x + 24\vec{\boldsymbol{e}}_y + 10\vec{\boldsymbol{e}}_z \ \mathrm{m}^2 = \vec{\boldsymbol{c}}. \end{aligned} \tag{19}$$

Az eredmény alapján felhasználva (18)-at az $\vec{\boldsymbol{a}}$ és $\vec{\boldsymbol{b}}$ által kifeszített paralelogramma területe

$$T = |\vec{\boldsymbol{c}}| = \sqrt{20^2 + 24^2 + 10^2} = 32{,}802 \ \mathrm{m}^2. \tag{20}$$

A közbezárt szög meghatározásához szükségünk van az $\vec{\boldsymbol{a}}$ és $\vec{\boldsymbol{b}}$ vektorok hosszára is

$$\begin{aligned} |\vec{\boldsymbol{a}}| &= \sqrt{3^2 + 5^2 + 6^2} = 8{,}367 \ \mathrm{m}, \\ |\vec{\boldsymbol{b}}| &= \sqrt{2^2 + 4^2} = 4{,}472 \ \mathrm{m}. \end{aligned} \tag{21}$$

Megint felhasználva a (18) egyenletet írhatjuk

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{\boldsymbol{c}}|}{|\vec{\boldsymbol{a}}||\vec{\boldsymbol{b}}|} = \frac{32{,}802 \ \mathrm{m}^2}{8{,}367 \ \mathrm{m} \cdot 4{,}472 \ \mathrm{m}} = 0{,}877, \tag{22}$$

mely alapján a szög: $\alpha = 61{,}24°$. Tehát jól látható, hogy a vektoriális szorzat is alkalmas a két vektor által bezárt szög számítására. Most határozzuk meg a $\vec{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{a}}$ vektorszorzatot

$$\begin{aligned} \vec{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{a}} &= (2\vec{\boldsymbol{e}}_x - 4\vec{\boldsymbol{e}}_z) \times (3\vec{\boldsymbol{e}}_x - 5\vec{\boldsymbol{e}}_y + 6\vec{\boldsymbol{e}}_z) = \\ = 2 \cdot (-5) \underbrace{\vec{\boldsymbol{e}}_x \times \vec{\boldsymbol{e}}_y}_{\vec{\boldsymbol{e}}_z} &+ 2 \cdot 6 \underbrace{\vec{\boldsymbol{e}}_x \times \vec{\boldsymbol{e}}_z}_{-\vec{\boldsymbol{e}}_y} + (-4) \cdot 3 \underbrace{\vec{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{e}}_x}_{\vec{\boldsymbol{e}}_y} + (-4) \cdot (-5) \underbrace{\vec{\boldsymbol{e}}_z \times \vec{\boldsymbol{e}}_y}_{-\vec{\boldsymbol{e}}_x} = \\ &= -20\vec{\boldsymbol{e}}_x - 24\vec{\boldsymbol{e}}_y - 10\vec{\boldsymbol{e}}_z \ \mathrm{m}^2 = -\vec{\boldsymbol{c}}, \end{aligned} \tag{23}$$

tehát ez a vektorszorzás valóban $-\vec{\boldsymbol{c}}$-t eredményezi. Gyakorlásként meg lehet oldani a példát a determináns kifejtésével is.

1.6. Vegyes szorzás

Három vektor vegyes szorzatát a következő módon értelmezzük

$$(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}) \cdot \vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{a}} \cdot (\vec{\boldsymbol{b}} \times \vec{\boldsymbol{c}}) = (\vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{b}}\vec{\boldsymbol{c}}) = \lambda. \tag{24}$$

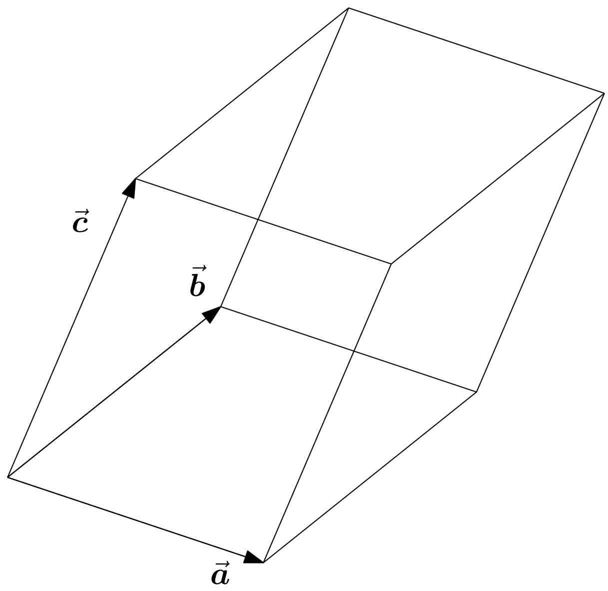
A műveletet kétféleképpen is elvégezhetjük. Az első, hogy a definíció alapján sorban elvégezzük a kijelölt műveleteket (mivel a vektorszorzás zárójelben szerepel, azzal kezdünk, majd az eredményvektort skalárisan összeszorozzuk a harmadik vektorral), vagy pedig determináns kifejtésével is elvégezhető a két művelet egyszerre oly módon, hogy a műveletben szereplő vektorok koordinátáit sorban beírjuk a determináns soraiba (első sorba az első vektor 3 koordinátáját, második sorba a másodikét, és így tovább)

$$(\vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{b}}\vec{\boldsymbol{c}}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, \tag{25}$$

a determinánst pedig kifejtjük. Fontos tulajdonság, hogy

$$(\vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{b}}\vec{\boldsymbol{c}}) = (\vec{\boldsymbol{b}}\vec{\boldsymbol{c}}\vec{\boldsymbol{a}}) = (\vec{\boldsymbol{c}}\vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{b}}) = -(\vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{c}}\vec{\boldsymbol{b}}) = -(\vec{\boldsymbol{b}}\vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{c}}) = -(\vec{\boldsymbol{c}}\vec{\boldsymbol{b}}\vec{\boldsymbol{a}}), \tag{26}$$

tehát ha a vektorok sorrendjét oly módon cseréljük, hogy az első helyen szereplőt az utolsó helyre írjuk, az eredmény nem változik, viszont ha két szomszédos vektort cserélünk meg, akkor ellenkező előjelűvé válik az eredmény (ebben a példában lesarkítva, ha tartjuk az abc sorrendet, akkor marad az előjel, ha nem tartjuk az abc sorrendet, cserélődik az előjel). A vegyes szorzás eredménye egy skalár szám, melynek geometriai jelentése is van, a három vektor által kifeszített paralelepipedon térfogatát kapjuk (5. ábra). Ebből következik egy



5. ábra. A három vektor által kifeszített paralelepipedon.

szintén fontos tulajdonság, ha a három vektor egyike sem $\vec{\mathbf{0}}$ vektor, de a vegyes szorzatuk 0, ez csak abban az esetben lehetséges, ha a 3 vektor egy síkban helyezkedik el.
Példa: Legyen adott 3 vektor: $\vec{\boldsymbol{a}} = 3\vec{\boldsymbol{e}}_x+5\vec{\boldsymbol{e}}_y$; $\vec{\boldsymbol{b}} = 6\vec{\boldsymbol{e}}_y-2\vec{\boldsymbol{e}}_z$; $\vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{e}}_x-7\vec{\boldsymbol{e}}_y+7\vec{\boldsymbol{e}}_z$. Határozzuk meg az $(\vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{b}}\vec{\boldsymbol{c}})$ vegyes szorzat értékét a kijelölt műveletek elvégzésével, majd számítsuk ki a $(\vec{\boldsymbol{c}}\vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{b}})$ szorzatot a determináns kifejtésének módszerével. Egy síkban helyezkedik-e el a 3 vektor?
Először is határozzuk meg az $(\vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{b}}\vec{\boldsymbol{c}})$ vegyes szorzat értékét a vegyes szorzás értelmezése alapján, tehát

$$(\vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{b}}\vec{\boldsymbol{c}}) = (\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}) \cdot \vec{\boldsymbol{c}} \tag{27}$$

módon. Először számítsuk ki a vektorszorzás eredményét, mely

$$\begin{gathered}\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = (3\vec{\boldsymbol{e}}_x + 5\vec{\boldsymbol{e}}_y) \times (6\vec{\boldsymbol{e}}_y - 2\vec{\boldsymbol{e}}_z) = \\ = 3 \cdot 6\vec{\boldsymbol{e}}_x \times \vec{\boldsymbol{e}}_y + 3 \cdot (-2)\vec{\boldsymbol{e}}_x \times \vec{\boldsymbol{e}}_z + 5 \cdot (-2)\vec{\boldsymbol{e}}_y \times \vec{\boldsymbol{e}}_z = \\ = -10\vec{\boldsymbol{e}}_x + 6\vec{\boldsymbol{e}}_y + 18\vec{\boldsymbol{e}}_z,\end{gathered} \tag{28}$$

majd az így kapott vektort szorozzuk meg skalárisan $\vec{\boldsymbol{c}}$-vel

$$\begin{gathered}(\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}) \cdot \vec{\boldsymbol{c}} = (-10\vec{\boldsymbol{e}}_x + 6\vec{\boldsymbol{e}}_y + 18\vec{\boldsymbol{e}}_z) \cdot (\vec{\boldsymbol{e}}_x - 7\vec{\boldsymbol{e}}_y + 7\vec{\boldsymbol{e}}_z) = \\ = (-10) \cdot 1 + 6 \cdot (-7) + 18 \cdot 7 = 74.\end{gathered} \tag{29}$$

Most számítsuk ki a $(\vec{c}\vec{a}\vec{b})$ vegyes szorzatot determináns kifejtésével (például utolsó sor szerint), tehát

$$\begin{gathered}(\vec{c}\vec{a}\vec{b}) = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -7 & 7 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \\ = 0 \cdot [(-7) \cdot 0 - 5 \cdot 7] - 6 \cdot [1 \cdot 0 - 3 \cdot 7] - 2 \cdot [1 \cdot 5 - 3 \cdot (-7)] = 74.\end{gathered} \tag{30}$$

Tehát látható, hogy mivel a vegyes szorzásban a tagok "abc" sorrendje maradt, ezért a kétféle számítás ugyanarra az eredményre vezetett. Mivel a szorzás értéke nem 0, ezért a három vektor nincs egy síkban, kifeszítenek egy térbeli testet, mely térfogatának mérőszáma 74.

1.7. Vektorok kétszeres vektoriális szorzata

Három vektor kétszeres vektoriális szorzatán a következő műveletet értjük

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{d}. \tag{31}$$

Ezt a műveletet elvégezhetjük a szokásos módon a zárójelek figyelembevételével, illetve a kifejtési tétel segítségével is, mely alapján

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}). \tag{32}$$

Talán úgy a legegyszerűbb megjegyezni, hogy először leírjuk a zárójelből azt a vektort, amelyik a három vektor közül középen áll (most $\vec{b}$), majd ezt megszorozzuk a másik két vektor skalár szorzatával $(\vec{a}\cdot\vec{c})$, majd vesszük a zárójelben álló másik vektort $(\vec{a})$, és ezt is megszorozzuk a másik kettő skalár szorzatával $(\vec{b} \cdot \vec{c})$, és ezt az előző szorzatból kivonjuk. Ezen logika mentén írható például, hogy

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}). \tag{33}$$

Az eredményekből jól látszik, hogy a végeredmény egy vektor lesz.
Példa: Használjuk az előző példában adott vektorokat: $\vec{a} = 3\vec{e}_x + 5\vec{e}_y$; $\vec{b} = 6\vec{e}_y - 2\vec{e}_z$; $\vec{c} = \vec{e}_x - 7\vec{e}_y + 7\vec{e}_z$. Határozzuk meg a $\vec{d} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ szorzatot a vektorszorzások elvégzésével, majd számítsuk ki a kifejtési tétel segítségével is! Gyakoroljuk a kifejtési tételt a $\vec{t} = (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a}$ szorzat meghatározásával!
Először is határozzuk meg vektorszorzásokkal a $\vec{d}$ vektort. Első lépésként meghatározzuk a zárójelben álló szorzatot

$$\vec{a} \times \vec{b} = (3\vec{e}_x + 5\vec{e}_y) \times (6\vec{e}_y - 2\vec{e}_z) = -10\vec{e}_x + 6\vec{e}_y + 18\vec{e}_z. \tag{34}$$

Kihasználhatjuk, hogy az előző példában ezt a szorzatot már meg kellett határozni. Így a $\vec{d}$ vektor

$$\begin{gathered}\vec{d} = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (-10\vec{e}_x + 6\vec{e}_y + 18\vec{e}_z) \times (\vec{e}_x - 7\vec{e}_y + 7\vec{e}_z) = \\ = (-10) \cdot (-7)\vec{e}_x \times \vec{e}_y + (-10) \cdot 7\vec{e}_x \times \vec{e}_z + 6 \cdot 1\vec{e}_y \times \vec{e}_x + \\ +6 \cdot 7\vec{e}_y \times \vec{e}_z + 18 \cdot 1\vec{e}_z \times \vec{e}_x + 18 \cdot (-7)\vec{e}_z \times \vec{e}_y = \\ = 70\vec{e}_z + 70\vec{e}_y - 6\vec{e}_z + 42\vec{e}_x + 18\vec{e}_y + 126\vec{e}_x = 168\vec{e}_x + 88\vec{e}_y + 64\vec{e}_z.\end{gathered} \tag{35}$$

Most határozzuk meg a kifejtési tétellel is a $\vec{\boldsymbol{d}}$ vektort

$$\begin{gathered}\vec{\boldsymbol{d}}=(\vec{\boldsymbol{a}}\times\vec{\boldsymbol{b}})\times\vec{\boldsymbol{c}}=\vec{\boldsymbol{b}}(\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{c}})-\vec{\boldsymbol{a}}(\vec{\boldsymbol{b}}\cdot\vec{\boldsymbol{c}})=\\(6\vec{\boldsymbol{e}}_y-2\vec{\boldsymbol{e}}_z)\underbrace{(3\cdot1-5\cdot7+0\cdot7)}_{-32}-(3\vec{\boldsymbol{e}}_x+5\vec{\boldsymbol{e}}_y)\underbrace{(0\cdot1-6\cdot7-2\cdot7)}_{-56}=\\=-192\vec{\boldsymbol{e}}_y+64\vec{\boldsymbol{e}}_z+168\vec{\boldsymbol{e}}_x+280\vec{\boldsymbol{e}}_y=168\vec{\boldsymbol{e}}_x+88\vec{\boldsymbol{e}}_y+64\vec{\boldsymbol{e}}_z.\end{gathered}\tag{36}$$

Látható, hogy ugyanazt az eredményt kaptuk. Számítsuk ki a $\vec{\boldsymbol{t}}$ vektort is a kifejtési tétellel

$$\begin{gathered}\vec{\boldsymbol{t}}=(\vec{\boldsymbol{b}}\times\vec{\boldsymbol{c}})\times\vec{\boldsymbol{a}}=\vec{\boldsymbol{c}}(\vec{\boldsymbol{b}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})-\vec{\boldsymbol{b}}(\vec{\boldsymbol{c}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}})=\\=(\vec{\boldsymbol{e}}_x-7\vec{\boldsymbol{e}}_y+7\vec{\boldsymbol{e}}_z)\underbrace{(0\cdot3+6\cdot5-2\cdot0)}_{30}-(6\vec{\boldsymbol{e}}_y-2\vec{\boldsymbol{e}}_z)\underbrace{(1\cdot3-7\cdot5+7\cdot0)}_{-32}=\\=30\vec{\boldsymbol{e}}_x-210\vec{\boldsymbol{e}}_y+210\vec{\boldsymbol{e}}_z+192\vec{\boldsymbol{e}}_y-64\vec{\boldsymbol{e}}_z=30\vec{\boldsymbol{e}}_x-18\vec{\boldsymbol{e}}_y+146\vec{\boldsymbol{e}}_z.\end{gathered}\tag{37}$$

2. Tenzoralgebra

Aki korábbi BSc-s tanulmányai során tanult Szilárdságtant, annak ez a fejezet is ismétlés lesz, aki viszont nem, annak pedig igyekszünk megfelelő matematikai alapot adni ezzel a fejezettel ahhoz, hogy a Rugalmasságtan tanulása könnyebb legyen. A mechanikában számos fizikai jellemző leírására már nem elegendő egy koordináta (skalár érték), vagy 3 koordináta (vektor), hanem szükségünk van ennél több független koordinátát is tartalmazó mennyiségek használatára, erre szolgálnak a tenzorok, ezek matematikai leírására pedig a mátrixok. A tenzor egy lineáris vektor-vektor függvény, két vektor között teremt kapcsolatot. Tekintsük át a tenzorokkal kapcsolatos műveleteket.

2.1. Vektorok diadikus szorzata

Értelmezünk egy újabb szorzást két vektor között, ez pedig a diadikus szorzás. Jele a $\circ$ vagy nem írunk a két mennyiség közé semmilyen műveleti jelet. Mindkét esetben a két mennyiség között diadikus szorzást értelmezünk. (Megjegyzés: a matematikában sajnos helytelenül jelölik két skalár szám, illetve egy skalár és egy vektor szorzatát, amennyiben $\cdot$ -ot tesznek középjük, ugyanis két skalár között, illetve egy skalár és egy vektor között kizárólag diadikus szorzást lehet értelmezni. Például a $3\cdot3=9$ szorzat ebben a formában elvileg helytelen, valójában így lenne a helyes: $3\circ3=9$.) Tehát két vektor diadikus szorzatát a következő módon jelöljük: $\vec{\boldsymbol{a}}\circ\vec{\boldsymbol{b}}$, vagy $\vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{b}}$, mindkét jelölés ugyanazt jelenti, és a művelet eredménye egy tenzor lesz. A tenzorokat általában nagy latin vagy görög betűkkel fogjuk jelölni, és kétszer aláhúzzuk (pl.: $\underline{\underline{\boldsymbol{U}}}$, $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$, $\underline{\underline{\boldsymbol{\Psi}}}$). Egyetlen tenzor esetében lesz ettől eltérés, az egységtenzort $\underline{\underline{\boldsymbol{1}}}$-ként fogjuk jelölni. Ahhoz, hogy két vektor diadikus szorzatát felírjuk, és ki tudjuk számítani, a vektorokat is mátrixosan kell kezelni. Egy vektor megadása általában oszlopvektorként történik, egymás alá írva a három koordinátáját. Ilyenkor a vektort szögletes zárójelbe tesszük ezzel is jelezve, hogy kiírjuk a mátrixát, például

$$[\vec{\boldsymbol{a}}]=\begin{bmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{bmatrix}.\tag{38}$$

A vektorokat sorvektorként is megadhatjuk, ennek előállítására szolgál a transzponálás művelete, melyet a vektor felső indexébe írt 'T' betűvel jelzünk, tehát

$$\left[\vec{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{T}}\right] = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}. \tag{39}$$

Két vektor diadikus szorzatának elvégzéséhez a mátrixok szorzásának szabályaira van még szükségünk. A diadikus szorzás elvégzése tehát úgy történik, hogy a szorzat első tagját oszlopvektorként, a másodikat sorvektorként írjuk fel, és a mátrixszorzás szabályainak megfelelően elvégezzük a szorzást. Ezt úgy célszerű kezdetekben felírni, hogy az első vektort oszlopba írjuk, a másodikat pedig tőle jobbra és felfelé sorvektorként írjuk fel, hogy a két vektor így egy 3×3-as mátrixot szegélyezzen, tehát az alábbi formában:

$$\left[\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\right] = \left[\vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{b}}\right] = [\vec{\boldsymbol{a}}]\left[\vec{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}\right] = \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \end{array}. \tag{40}$$

A mátrix szorzás szabályainak megfelelően a bal oldali mátrixból vesszük az első sort (zölddel jelölve), a felsőből pedig az első oszlopot (kékkel jelölve), összeszorozzuk őket, és ez adja az eredmény 11-es (ejtsd: egy-egyes) elemét (pirossal jelölve), vagyis az első sor első oszlopába kerülő eredményt:

$$\left[\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\right] = \left[\vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{b}}\right] = [\vec{\boldsymbol{a}}]\left[\vec{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}\right] = \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} {\color{blue}b_x} & b_y & b_z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} {\color{green}a_x} \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} {\color{red}a_x b_x} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \end{array}. \tag{41}$$

Következő lépés, hogy az első mátrix első sorát választjuk (zöld), a felső mátrix második oszlopát (kék), összeszorozva kettőt kapjuk az 12-es (ejtsd: egy-kettes) elemet:

$$\left[\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\right] = \left[\vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{b}}\right] = [\vec{\boldsymbol{a}}]\left[\vec{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}\right] = \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} b_x & {\color{blue}b_y} & b_z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} {\color{green}a_x} \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_x b_x & {\color{red}a_x b_y} & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \end{array}, \tag{42}$$

és így tovább. Végül a következő 3×3-as tenzort kapjuk eredményül:

$$\left[\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\right] = \left[\vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{b}}\right] = [\vec{\boldsymbol{a}}]\left[\vec{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}\right] = \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix} \end{array}. \tag{43}$$

Egy tenzorban megkülönböztetjük a főátlót és a mellékátlókat. A főátló a bal felső elemtől a jobb alsó elemig terjedő átló és az átló által lefedett elemeket értjük alatta, tehát a (43) egyenletben a főátló elemei: $a_x b_x$, $a_y b_y$ és $a_z b_z$ Az összes többi elem a mellékátlókban helyezkedik el. Ezek alapján a transzponálás műveletét úgy értelmezzük, hogy a főátló elemei maradnak eredeti helyükön, a mellékátlóbeli elemeket pedig erre a főátlóra szimmetrikusan megcseréljük, így a fenti $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ tenzor transzponáltja a következőképp néz ki

$$\left[\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}^{\mathrm{T}}\right] = \begin{bmatrix} a_x b_x & a_y b_x & a_z b_x \\ a_x b_y & a_y b_y & a_z b_y \\ a_x b_z & a_y b_z & a_z b_z \end{bmatrix}, \tag{44}$$

vagy másképp fogalmazva az eredeti tenzor oszlopai a transzponálást követően sorokba lettek rendezve. A diadikus szorzás egyik tulajdonsága, hogy nem kommutatív, vagyis a tagok felcserélésével nem kapjuk vissza az eredeti tenzort, hanem annak épp a transzponáltja lesz az eredmény

$$\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} = \vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{b}}, \qquad \underline{\underline{\boldsymbol{A}}}^{\mathrm{T}} = \vec{\boldsymbol{b}} \circ \vec{\boldsymbol{a}}. \tag{45}$$

A tenzorok elemeit általánosan egyetlen betűvel jelöljük, és két indexszel látjuk el, annak megfelelően hogy hanyadik sor hanyadik oszlopában található elemről beszélünk. Tehát az A_{xx} (vagy A_{11}) elem az $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ tenzor első sorának első oszlopában található elem. Nézzük, milyen eredménnyel jár, ha a DDKR bázisvektorait szorozzuk össze diadikusan. Három példát nézünk meg

$$\begin{aligned}
[\vec{\boldsymbol{e}}_x \circ \vec{\boldsymbol{e}}_x] &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
[\vec{\boldsymbol{e}}_x \circ \vec{\boldsymbol{e}}_y] &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
[\vec{\boldsymbol{e}}_z \circ \vec{\boldsymbol{e}}_y] &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{46}$$

A bázisvektorok diadikus szorzataiból összesen 9 különböző tenzor állítható elő, melyekből 3-at mutattunk be.

Példa: Adott két vektor: $\vec{\boldsymbol{a}} = 6\vec{\boldsymbol{e}}_y - 4\vec{\boldsymbol{e}}_z$ és $\vec{\boldsymbol{b}} = -5\vec{\boldsymbol{e}}_x + 2\vec{\boldsymbol{e}}_z$. Határozzuk meg az $\underline{\underline{\boldsymbol{B}}} = \vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{b}}$ tenzort, illetve a $\vec{\boldsymbol{b}} \circ \vec{\boldsymbol{a}}$ szorzatot! Határozzuk meg a $\underline{\underline{\boldsymbol{C}}} = \vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{e}}_y$ tenzort is!

A $\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}$ tenzor meghatározásához most is írjuk fel az első vektort oszlopban, a másodikat jobbra felfelé sorban, hogy kialakuljon a 3×3 tenzor, és a fent ismertetett módon a mátrix szorzás szabályainak megfelelően végezzük el a műveletet

$$[\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}] = \left[\vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{b}}\right] = [\vec{\boldsymbol{a}}] \left[\vec{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}\right] = \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -30 & 0 & 12 \\ 20 & 0 & -8 \end{bmatrix} \end{array}. \tag{47}$$

Most végezzük el a $\vec{\boldsymbol{b}} \circ \vec{\boldsymbol{a}}$ szorzatot is, vagyis most oszlopba a $\vec{\boldsymbol{b}}$ vektort írjuk, míg sorba az $\vec{\boldsymbol{a}}$-t, tehát

$$\left[\vec{\boldsymbol{b}} \circ \vec{\boldsymbol{a}}\right] = \left[\vec{\boldsymbol{b}}\right] \left[\vec{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{T}}\right] = \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 0 & 6 & -4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & -30 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -8 \end{bmatrix} \end{array} = \left[\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}^{\mathrm{T}}\right]. \tag{48}$$

Tehát elvégezve ezt a szorzást azt látjuk, hogy az előző $\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}$ tenzor oszlopai az új tenzor soraiba kerültek, vagyis tényleg a $\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}$ tenzor transzponáltját kaptuk a két vektor felcserélésével. Most nézzük a $\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}$ tenzort

$$[\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}] = [\vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{e}}_y] = [\vec{\boldsymbol{a}}] \left[\vec{\boldsymbol{e}}_y^{\mathrm{T}}\right] = \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \end{array}. \tag{49}$$

Így lényegében annyi történt, hogy egy 3×3-as mátrix második oszlopába rendeztük az $\vec{\boldsymbol{a}}$ vektort. Ezt később ki fogjuk használni. Természetesen, ha $\vec{\boldsymbol{e}}_x$-szel szorzunk meg diadikusan egy vektort, akkor a tenzor első oszlopába kerül be a vektor, ha pedig $\vec{\boldsymbol{e}}_z$-vel, akkor pedig a harmadik oszlopba kerül a vektor. Fordított sorrendben, ha az egységvektor van elől, akkor pedig a megfelelő sorba kerül be a vektor.

2.2. Két tenzor összeadása

Két tenzor összegét/különbségét úgy értelmezzük, hogy az azonos pozícióban lévő elemeket összeadjuk/kivonjuk, eredményül pedig az eredetivel megegyező méretű tenzort kapunk

$$[\underline{\underline{\boldsymbol{D}}}] = [\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \pm \underline{\underline{\boldsymbol{B}}}] = \begin{bmatrix} A_{xx} \pm B_{xx} & A_{xy} \pm B_{xy} & A_{xz} \pm B_{xz} \\ A_{yx} \pm B_{yx} & A_{yy} \pm B_{yy} & A_{yz} \pm B_{yz} \\ A_{zx} \pm B_{zx} & A_{zy} \pm B_{zy} & A_{zz} \pm B_{zz} \end{bmatrix}. \tag{50}$$

Az összeadás kommutatív, a tagok felcserélésével ugyanazt az eredményt kapjuk

$$\underline{\underline{\boldsymbol{D}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{B}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{B}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{A}}}. \tag{51}$$

Két tenzort csak akkor tudunk összeadni, ha azonos méretűek, így az eredmény mérete is ugyanaz lesz.
Példa: Adjuk össze az $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ és $\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}$ tenzorokat, majd képezzük a különbségüket is.

$$[\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}] = \begin{bmatrix} 3 & 10 & -4 \\ 0 & 6 & 5 \\ -2 & 12 & -7 \end{bmatrix}, \qquad [\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}] = \begin{bmatrix} 5 & -8 & -9 \\ 13 & 11 & 1 \\ 6 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{52}$$

Az két tenzor összege a fent említett szabály alapján tehát

$$[\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}] = [\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{B}}}] = \begin{bmatrix} 3+5 & 10+(-8) & (-4)+(-9) \\ 0+13 & 6+11 & 5+1 \\ (-2)+6 & 12+0 & (-7)+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -13 \\ 13 & 17 & 6 \\ 4 & 12 & -8 \end{bmatrix}, \tag{53}$$

és a két tenzor különbsége

$$[\underline{\underline{\boldsymbol{D}}}] = [\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} - \underline{\underline{\boldsymbol{B}}}] = \begin{bmatrix} 3-5 & 10-(-8) & (-4)-(-9) \\ 0-13 & 6-11 & 5-1 \\ (-2)-6 & 12-0 & (-7)-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 18 & 5 \\ -13 & -5 & 4 \\ -8 & 12 & -6 \end{bmatrix}. \tag{54}$$

2.3. Tenzor skalárral való szorzása

A szabály ugyanaz, mint vektorok esetében, ha egy tenzort skalár számmal szorzunk meg, akkor a tenzor minden elemét meg kell szorozni ezzel a számmal

$$[\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}] = [\lambda\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}] = \begin{bmatrix} \lambda A_{xx} & \lambda A_{xy} & \lambda A_{xz} \\ \lambda A_{yx} & \lambda A_{yy} & \lambda A_{yz} \\ \lambda A_{zx} & \lambda A_{zy} & \lambda A_{zz} \end{bmatrix}. \tag{55}$$

Példa: Az előző példából vett $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ tenzort szorozzuk meg 8-cal:

$$[\underline{\underline{\boldsymbol{F}}}] = 8\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} = \begin{bmatrix} 8\cdot 3 & 8\cdot 10 & 8\cdot(-4) \\ 8\cdot 0 & 8\cdot 6 & 8\cdot 5 \\ 8\cdot(-2) & 8\cdot 12 & 8\cdot(-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 80 & -32 \\ 0 & 48 & 40 \\ -16 & 96 & -56 \end{bmatrix}. \tag{56}$$

2.4. Tenzor diadikus alakja

Két vektor diadikus szorzatát úgy is elvégezhetjük, hogy a két vektort leírjuk egymás mellé, és minden tagot minden taggal összeszorzunk

$$
\begin{aligned}
\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} = \vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{b}} = (a_x \vec{\boldsymbol{e}}_x + a_y \vec{\boldsymbol{e}}_y + a_z \vec{\boldsymbol{e}}_z) \circ (b_x \vec{\boldsymbol{e}}_x + b_y \vec{\boldsymbol{e}}_y + a_z \vec{\boldsymbol{e}}_z) = \\
= a_x b_x \vec{\boldsymbol{e}}_x \circ \vec{\boldsymbol{e}}_x + a_x b_y \vec{\boldsymbol{e}}_x \circ \vec{\boldsymbol{e}}_y + a_x b_z \vec{\boldsymbol{e}}_x \circ \vec{\boldsymbol{e}}_z + a_y b_x \vec{\boldsymbol{e}}_y \circ \vec{\boldsymbol{e}}_x + a_y b_y \vec{\boldsymbol{e}}_y \circ \vec{\boldsymbol{e}}_y + \\
+ a_y b_z \vec{\boldsymbol{e}}_y \circ \vec{\boldsymbol{e}}_z + a_z b_x \vec{\boldsymbol{e}}_z \circ \vec{\boldsymbol{e}}_x + a_z b_y \vec{\boldsymbol{e}}_z \circ \vec{\boldsymbol{e}}_y + a_z b_z \vec{\boldsymbol{e}}_z \circ \vec{\boldsymbol{e}}_z.
\end{aligned}
\tag{57}
$$

Ha ebbe az egyenletbe beírjuk a (46) mátrixokat, és azok mintájára képezhető további hat mátrixot a bázisvektorok diadikus szorzatai alapján, majd ezeket megszorozzuk az előttük álló koordinátával, és végül összeadjuk az így kapott tenzorokat, az eredmény meg fog egyezni a (44) mátrixszal. Fontos tulajdonság, hogy

$$
(\vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{b}}) \cdot \vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{a}} (\vec{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{c}}). \tag{58}
$$

Ez alapján ha a (57) egyenletben a diadikus szorzatot megszorozzuk skalárisan az egyik bázisvektorral, akkor a következőt kapjuk

$$
\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_x = (\vec{\boldsymbol{a}} \circ \vec{\boldsymbol{b}}) \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_x = \vec{\boldsymbol{a}} (\vec{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_x) = \vec{\boldsymbol{a}} b_x = a_x b_x \vec{\boldsymbol{e}}_x + a_y b_x \vec{\boldsymbol{e}}_y + a_z b_x \vec{\boldsymbol{e}}_z = \vec{\boldsymbol{A}}_x, \tag{59}
$$

ez pedig nem más, mint az $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ tenzor első oszlopa egy vektorba rendezve. Hasonlóan a második és harmadik oszlopot is vektorba lehet rendezni: $\vec{\boldsymbol{A}}_y = \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_y$ és $\vec{\boldsymbol{A}}_z = \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_z$. Ha pedig ezeket az egyenleteket összevetjük a (57)-es egyenlettel, akkor az oszlopvektorok segítségével felírható a tenzor diadikus alakban

$$
\begin{gathered}
\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} = \vec{\boldsymbol{A}}_x \circ \vec{\boldsymbol{e}}_x + \vec{\boldsymbol{A}}_y \circ \vec{\boldsymbol{e}}_y + \vec{\boldsymbol{A}}_z \circ \vec{\boldsymbol{e}}_z, \\
[\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \downarrow \vec{\boldsymbol{A}}_x & \downarrow \vec{\boldsymbol{A}}_y & \downarrow \vec{\boldsymbol{A}}_z \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix} \end{array}.
\end{gathered}
\tag{60}
$$

2.5. Tenzorok (egyszeres) skaláris szorzása

Két tenzor (egyszeres) skaláris szorzását a mátrix szorzás szabályainak megfelelően kell elvégezni. Megint segítségképp írjuk az első mátrixot le, majd tőle jobbra felfelé a másodikat:

$$
[\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}] = [\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{B}}}] = \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} & B_{xz} \\ B_{yx} & B_{yy} & B_{yz} \\ B_{zx} & B_{zy} & B_{zz} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \phantom{B_{xx}} & \phantom{B_{xy}} & \phantom{B_{xz}} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \end{array}. \tag{61}
$$

A mátrix szorzás szabálya értelmében vesszük a bal oldali mátrix első sorát (ismét zölddel), illetve a felső mátrix első oszlopát (kék), és összeszorozzuk a sor és oszlop első elemét, leírjuk, majd összeszorozzuk a sor második elemét az oszlop második elemével, végül a sor harmadik elemét az oszlop harmadik elemével, majd ezeket a szorzatokat összeadjuk (tekintsük úgy, mintha a bal oldali mátrix első sora is egy vektor lenne, meg a felső mátrix első oszlopa is egy vektor, és ezt a kettőt skalárisan összeszorozzuk). Az eredmény a pirossal jelölt C_{xx} elem lesz:

$$\left[\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}\right] = \left[\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{B}}}\right] = \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} \color{blue}{B_{xx}} & B_{xy} & B_{xz} \\ \color{blue}{B_{yx}} & B_{yy} & B_{yz} \\ \color{blue}{B_{zx}} & B_{zy} & B_{zz} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \color{green}{A_{xx}} & \color{green}{A_{xy}} & \color{green}{A_{xz}} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \color{red}{C_{xx}} & \phantom{C_{xy}} & \phantom{C_{xz}} \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \end{array}, \tag{62}$$

ahol

$$C_{xx} = A_{xx}B_{xx} + A_{xy}B_{yx} + A_{xz}B_{zx}. \tag{63}$$

A következő elem a C_{xy} (piros), mely elemet az bal oldali mátrix első sorának (zöld) és a felső mátrix második oszlopának (kék) összeszorzásából kapjuk

$$\left[\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}\right] = \left[\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{B}}}\right] = \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} B_{xx} & \color{blue}{B_{xy}} & B_{xz} \\ B_{yx} & \color{blue}{B_{yy}} & B_{yz} \\ B_{zx} & \color{blue}{B_{zy}} & B_{zz} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \color{green}{A_{xx}} & \color{green}{A_{xy}} & \color{green}{A_{xz}} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} C_{xx} & \color{red}{C_{xy}} & \phantom{C_{xz}} \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \end{array}, \tag{64}$$

ahol

$$C_{xy} = A_{xx}B_{xy} + A_{xy}B_{yy} + A_{xz}B_{zy}, \tag{65}$$

és így tovább. Két tenzor közötti skaláris szorzás csak akkor végezhető el, ha a szorzatban a bal oldali tenzor oszlopainak a száma megegyezik a jobb oldali tenzor sorainak számával. Egy tenzor esetében a méretét így adjuk meg: $(m \times n)$, ahol m a sorok, n az oszlopok számát jelöli. Vagyis a skaláris szorzás akkor végezhető el, ha egy $(m \times n)$ méretű tenzort egy $(n \times k)$ méretű tenzorral szorzunk össze, az eredmény pedig egy $(m \times k)$ méretű tenzor lesz.

$$\underset{(m\times n)}{\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}} \cdot \underset{(n\times k)}{\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}} = \underset{(m\times k)}{\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}}\,. \tag{66}$$

A fenti példában egy (3×3) méretű tenzort szoroztunk össze egy ugyanekkora tenzorral, így az eredmény is egy (3×3) tenzor lett. További tulajdonság, hogy

$$\underset{(m\times n)}{\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}} \cdot \underset{(n\times k)}{\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}} = \underset{(m\times k)}{\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}} \quad \rightarrow \quad \underset{(k\times n)}{\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}^{\mathrm{T}}} \cdot \underset{(n\times m)}{\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}^{\mathrm{T}}} = \underset{(k\times m)}{\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}^{\mathrm{T}}}\,. \tag{67}$$

Két tenzort a skaláris szorzásban általános esetben nem is lehet felcserélni, mert nem teljesülne két tenzor összeszorzásának feltétele. Ha megcseréljük a két tenzort, a szorzás feltétele csak akkor teljesül, ha mindkét tenzor sorainak és oszlopainak száma megegyezik (tehát mindkettő $(m \times m)$ méretű), a szorzatuk eredménye ekkor is eltérő lesz

$$\underset{(m\times m)}{\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}} \cdot \underset{(m\times m)}{\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}} \neq \underset{(m\times m)}{\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}} \cdot \underset{(m\times m)}{\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}}\,, \tag{68}$$

tehát a művelet nem kommutatív. A továbbiakban $(m \times m)$ méretű tenzorokkal foglalkozunk.

Példa: Legyen adott az $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ és $\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}$ tenzor. Határozzuk meg az $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{B}}}$ szorzatot, a $\underline{\underline{\boldsymbol{B}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ szorzatot, illetve a $\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{A}}}^{\mathrm{T}}$ szorzatot!

$$[\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \qquad [\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{69}$$

Amint látjuk, mindkét tenzor (3×3) méretű, így minden szorzás, amit kijelöltünk, elvégezhető. Jelöljük el $\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}$-vel az első szorzat eredményét. Írjuk le az $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ tenzort, majd tőle jobbra felfelé a $\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}$ tenzort, hogy kialakuljon alattuk az eredménynek, azaz a $\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}$ tenzornak a mátrixa, majd végezzük el a műveletet a mátrix szorzás szabályainak megfelelően [használjuk a (62), (63), (64), (65) egyenleteket]

$$[\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}] = [\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{B}}}] = \begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 14 & 3 & -3 \\ 13 & -5 & 6 \\ 7 & 8 & -5 \end{bmatrix} \end{array}. \tag{70}$$

Részletesebben, a C_{11} elemet úgy kapjuk, hogy az $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ tenzor első sorát megszorozzuk a $\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}$ tenzor első oszlopával, majd a C_{12} elem az $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ tenzor első sorának kombinációja a $\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}$ tenzor második oszlopával, és így tovább:

$$C_{11} = 2 \cdot 3 + (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 4 = 14, \tag{71a}$$
$$C_{12} = 2 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = 3, \tag{71b}$$
$$C_{13} = 2 \cdot 0 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 1 = -3, \tag{71c}$$
$$C_{21} = 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 = 13, \tag{71d}$$
$$C_{22} = 3 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = -5, \tag{71e}$$
$$C_{23} = 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 6, \tag{71f}$$
$$C_{31} = (-1) \cdot 3 + (-3) \cdot (-2) + 1 \cdot 4 = 7, \tag{71g}$$
$$C_{32} = (-1) \cdot (-1) + (-3) \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = 8, \tag{71h}$$
$$C_{33} = (-1) \cdot 0 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 1 = -5. \tag{71i}$$

Most határozzuk meg a $\underline{\underline{\boldsymbol{D}}}$ tenzort, mely a $\underline{\underline{\boldsymbol{B}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ szorzatot jelenti. Az eljárás ugyanaz, mint az előbb, de most már egymás mellé írjuk le a két tenzort, és utánuk az eredményt, így

$$[\underline{\underline{\boldsymbol{D}}}] = [\underline{\underline{\boldsymbol{B}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{A}}}] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -8 & 1 \\ -12 & -6 & -4 \\ 10 & -9 & 7 \end{bmatrix}. \tag{72}$$

Jól látszik, hogy valóban nem kommutatív a szorzás, mivel teljesen más a $\underline{\underline{\boldsymbol{D}}}$ tenzor mátrixa, mint a $\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}$ tenzoré. Most határozzuk meg a $\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{A}}}^{\mathrm{T}}$ szorzatot! Ehhez először is képezzük a két tenzor transzponáltját, vagyis mindkettő esetében a tenzorok oszlopait írjuk sorokba, így

$$[\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}^{\mathrm{T}}] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad [\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}^{\mathrm{T}}] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{73}$$

A keresett szorzat

$$\left[\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}^{\mathrm{T}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{A}}}^{\mathrm{T}}\right] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 13 & 7 \\ 3 & -5 & 8 \\ -3 & 6 & -5 \end{bmatrix} = \left[\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}^{\mathrm{T}}\right], \tag{74}$$

tehát ha összevetjük az eredményt a (70)-es egyenlet eredményével, vagyis a $\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}$ tenzorral, akkor látható, hogy valóban annak transzponáltja az eredmény.

2.6. Az egységtenzor

A tenzoralgebra egység eleme az egységtenzor ($\underline{\underline{\mathbf{1}}}$), mellyel bármilyen tetszőleges tenzort vagy vektort skalárisan megszorozva magát a tenzort, vagy vektort kapjuk vissza.

$$\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{1}}} = \underline{\underline{\mathbf{1}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} = \underline{\underline{\boldsymbol{A}}}, \qquad \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{1}}} = \underline{\underline{\mathbf{1}}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}}. \tag{75}$$

Az egységtenzor mátrixa nagyon egyszerű felépítésű, a főátlójában minden elem 1, a mellékátlókban pedig minden eleme 0. Például egy (3×3) méretű egységtenzor a következőképp néz ki

$$\underset{(3\times3)}{\left[\underline{\underline{\mathbf{1}}}\right]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{76}$$

Egy tetszőleges vektorral megszorozva (alkalmazva a mátrixszorzás szabályait)

$$\left[\underline{\underline{\mathbf{1}}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}, \tag{77}$$

vagy egy tenzorral megszorozva

$$\left[\underline{\underline{\mathbf{1}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix}. \tag{78}$$

2.7. Tenzor invertálása

Egy tenzor inverzén azt a tenzort értjük, mellyel az eredeti tenzort megszorozva az egységtenzort kapjuk eredményül. Jele a tenzor felső indexébe írt -1. Tehát egy tetszőleges $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ tenzor inverzén az $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}^{-1}$ tenzort értjük

$$\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{A}}}^{-1} = \underline{\underline{\boldsymbol{A}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{1}}}. \tag{79}$$

Egy tenzor inverzét pedig az invertálás műveletével kapjuk meg. Első lépésként meg kell határozni a tenzor minden eleméhez tartozó aldetermináns értékét. Egy (3×3) méretű tenzor esetében, melynek 9 eleme van, összesen 9 ilyen aldetermináns képezhető. Képezzük a (3×3) méretű $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ mátrix 11-es eleméhez tartozó aldeterminánst (jelölje M_{xx} ennek az aldeterminánsnak az értékét). Ehhez azt kell tennünk, hogy kiválasztjuk az eredeti tenzor 11-es elemét (zöld), a sorát és oszlopát töröljük (kék), majd a megmaradó (2×2)

méretű determináns (fekete) értékét meghatározzuk (főátlóbeli elemek szorzata mínusz a mellékátlóbeli elemek szorzata)

$$[\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}] = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad M_{xx} = \begin{vmatrix} A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zy} & A_{zz} \end{vmatrix} = A_{yy}A_{zz} - A_{zy}A_{yz}. \tag{80}$$

Ugyanezt a logikát követve a maradék nyolc elemhez tartozó aldeterminánst is ki kell számolni, itt csak egy továbbit ismertetünk

$$[\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}] = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad M_{xy} = \begin{vmatrix} A_{yx} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zz} \end{vmatrix} = A_{yx}A_{zz} - A_{zx}A_{yz}. \tag{81}$$

Az így előállt kilenc aldeterminánsból előállítható az $\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}$ tenzor, mely a következő

$$[\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}] = \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{bmatrix}. \tag{82}$$

Ebből kell képezni az ún. adjungált tenzort (az eredeti $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ tenzor adjungáltját). Vesszük az $\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}$ tenzor transzponáltját, majd a sakktáblaszabály alapján a megfelelő elemeket egy negatív előjellel megszorozzuk (bal felső elemtől haladunk sorban, és ennek megfelelően + előjellel kezdve felváltva kapnak az elemek + és − előjelet, a sorok végén a következő sor elejére ugrunk, és folytatjuk a sormintát)

$$\mathrm{adj}\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} = \begin{bmatrix} M_{xx} & -M_{yx} & M_{zx} \\ -M_{xy} & M_{yy} & -M_{zy} \\ M_{xz} & -M_{yz} & M_{zz} \end{bmatrix}. \tag{83}$$

Tehát jól látható, hogy transzponáltuk az $\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}$ tenzort, és 4 elem negatív előjelet kapott. Az adjungált segítségével kapjuk az inverz tenzort a következő képlet segítségével

$$\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}^{-1} = \frac{\mathrm{adj}\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}}{\det \underline{\underline{\boldsymbol{A}}}}. \tag{84}$$

Általános esetben egy tenzor inverze NEM egyezik meg a transzponáltjával!
Példa: Adott a $\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}$ tenzor. Határozzuk meg az inverzét!

$$[\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}] = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}. \tag{85}$$

Ehhez először is képezzük az elemekhez tartozó aldeterminánsokat a fent leírt módon:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 8 = -14, \tag{86a}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 10 - 8 = 2, \tag{86b}$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -10 - 6 = -16, \tag{86c}$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 0 = -4, \tag{86d}$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -18 - 0 = -18, \tag{86e}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 18 - 4 = 14, \tag{86f}$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 0 = 8, \tag{86g}$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 9 & 0 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 36 - 0 = 36, \tag{86h}$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 27 + 10 = 37. \tag{86i}$$

Így az aldeterminánsok $\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}$ tenzora a következő alakot ölti

$$\left[\underline{\underline{\boldsymbol{M}}}\right] = \begin{bmatrix} -14 & 2 & -16 \\ -4 & -18 & 14 \\ 8 & 36 & 37 \end{bmatrix}. \tag{87}$$

Ezt a tenzort transzponáljuk, és a megfelelő elemeket megszorozzuk -1-gyel ugyanúgy, mint az (83) egyenletnél is látható

$$\left[\mathrm{adj}\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}\right] = \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{21} & M_{31} \\ -M_{12} & M_{22} & -M_{31} \\ M_{13} & -M_{23} & M_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 4 & 8 \\ -2 & -18 & -36 \\ -16 & -14 & 37 \end{bmatrix}. \tag{88}$$

Határozzuk meg a $\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}$ tenzor determinánsát is (javasoljuk az első sor szerinti kifejtést)

$$\begin{aligned} \det\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} &= \begin{vmatrix} 9 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \\ &= 9 \cdot \underbrace{[3 \cdot (-2) - 2 \cdot 4]}_{-14} - 2 \cdot \underbrace{[(-5) \cdot (-2) - 2 \cdot 4]}_{2} + 0 \cdot (\ldots) = -130. \end{aligned} \tag{89}$$

Így fel tudjuk írni a $\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}^{-1}$ tenzort

$$\left[\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}^{-1}\right] = \frac{1}{\det\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}}\mathrm{adj}\underline{\underline{\boldsymbol{T}}} = -\frac{1}{130}\begin{bmatrix} -14 & 4 & 8 \\ -2 & -18 & -36 \\ -16 & -14 & 37 \end{bmatrix}. \tag{90}$$

Tehát az adjungált tenzor minden elemét el kell osztani 130-cal. Az egyszerűbb és pontosabb számolás kedvéért ilyen formában hagyjuk az inverz tenzort. Jól látszik, hogy ez a tenzor nem egyezik meg az eredeti tenzor transzponáltjával. Ellenőrizzük le, hogy valóban ez az inverz tenzor

$$\left[\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}^{-1}\right] = -\frac{1}{130}\begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -14 & 4 & 8 \\ -2 & -18 & -36 \\ -16 & -14 & 37 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{130}\begin{bmatrix} \underbrace{-9\cdot 14 - 2\cdot 2 - 0\cdot 16}_{-130} & \underbrace{9\cdot 4 - 2\cdot 18 - 0\cdot 14}_{0} & \underbrace{9\cdot 8 - 2\cdot 36 + 0\cdot 37}_{0} \\ \underbrace{5\cdot 14 - 2\cdot 3 - 4\cdot 16}_{0} & \underbrace{-5\cdot 4 - 3\cdot 18 - 4\cdot 14}_{-130} & \underbrace{-5\cdot 8 - 3\cdot 36 + 4\cdot 37}_{0} \\ \underbrace{-2\cdot 14 - 2\cdot 2 + 2\cdot 16}_{0} & \underbrace{2\cdot 4 - 2\cdot 18 + 2\cdot 14}_{0} & \underbrace{2\cdot 8 - 2\cdot 36 - 2\cdot 37}_{-130} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\underline{\underline{\boldsymbol{1}}}\right]. \tag{91}$$

Vagyis az eredeti $\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}$ tenzort megszorozva egyszeresen skalárisan az inverz $\underline{\underline{\boldsymbol{T}}}^{-1}$ tenzorral egységtenzort kaptunk eredményül, tehát jól határoztuk meg az inverz tenzort.

2.8. Ortogonális tenzor

Egy tenzort ortogonálisnak nevezünk, ha a tenzor transzponáltja megegyezik az inverzével, vagyis $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}^{\mathrm{T}} = \underline{\underline{\boldsymbol{A}}}^{-1}$ és így $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}^{\mathrm{T}} = \underline{\underline{\boldsymbol{1}}}$.
Példa: Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi tenzor valóban ortogonális-e!

$$\left[\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \tag{92}$$

Képezzük a tenzor transzponáltját

$$\left[\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}^{\mathrm{T}}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \tag{93}$$

majd ezt szorozzuk meg skalárisan az eredeti $\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}$ tenzorral

$$\left[\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}\cdot\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}^{\mathrm{T}}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 & 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot 0 + 0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot 0 + 0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & -0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\cdot 0 + 0\cdot\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} & -0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\cdot 0 + 0\cdot\frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{bmatrix} = \tag{94}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left[\underline{\underline{\boldsymbol{1}}}\right],$$

tehát a vizsgált $\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}$ tenzor ortogonális. Gyakorlásként az előző alfejezetben tárgyalt módon állítsuk elő a $\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}^{-1}$ inverz tenzort. Ennek meg kell egyeznie az eredeti tenzor transzponáltjával.

2.9. Sajátértékprobléma

Egy tenzor sajátértékproblémáján a következő feladatot értjük

$$\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}} = \lambda \vec{\boldsymbol{w}}. \tag{95}$$

Ha található olyan λ érték és $\vec{\boldsymbol{w}}$ vektor, melyre ez az egyenlet fennáll, akkor λ a tenzor ún. sajátértéke vagy főértéke és a hozzá tartozó $\vec{\boldsymbol{w}}$ vektor a tenzor sajátvektora vagy főiránya. Ha a tenzort áttranszformáljuk a sajátvektorok koordináta-rendszerébe, akkor a tenzor diagonálissá válik, vagyis csak a főátlójában szerepelhetnek zérustól különböző értékek (ezek pedig épp a sajátértékek), a mellékátlókban minden elem értéke 0. Ha a $\vec{\boldsymbol{w}}$ vektort megszorozzuk az egységtenzorral, magát a $\vec{\boldsymbol{w}}$ vektort kapjuk vissza, vagyis mintha nem történt volna semmi. Tegyük ezt meg az (95) egyenlet jobb oldalával

$$\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}} = \lambda \underline{\underline{\boldsymbol{1}}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}}. \tag{96}$$

Rendezzük az egyenletet 0-ra, majd emeljük ki a $\vec{\boldsymbol{w}}$ vektort

$$\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}} - \lambda \underline{\underline{\boldsymbol{1}}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}} = \vec{\boldsymbol{0}} \qquad \rightarrow \qquad \left[\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} - \lambda \underline{\underline{\boldsymbol{1}}}\right] \cdot \vec{\boldsymbol{w}} = \vec{\boldsymbol{0}}. \tag{97}$$

Ez az egyenlet így egy szorzat lett. Szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. A triviális megoldás az, ha a $\vec{\boldsymbol{w}}$ vektor épp $\vec{\boldsymbol{0}}$ vektor lenne. Mi az ettől eltérő megoldásokat keressük, vagyis amikor az együttható mátrix determinánsa 0, azaz

$$\begin{gathered}
\det\left[\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} - \lambda \underline{\underline{\boldsymbol{1}}}\right] = \begin{vmatrix} A_{xx}-\lambda & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy}-\lambda & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz}-\lambda \end{vmatrix} = \\
(A_{xx}-\lambda)\left[(A_{yy}-\lambda)(A_{zz}-\lambda) - A_{zy}A_{yz}\right] - A_{xy}\left[A_{yx}(A_{zz}-\lambda) - A_{zx}A_{yz}\right] + \\
+ A_{xz}\left[A_{yx}A_{zy} - A_{zx}(A_{yy}-\lambda)\right] = 0.
\end{gathered} \tag{98}$$

Részletes kifejtés után, illetve megszorozva az egyenletet -1-gyel a következő harmadfokú egyenletet kapjuk λ-ra nézve

$$\lambda^3 - A_{\mathrm{I}}\lambda^2 + A_{\mathrm{II}}\lambda - A_{\mathrm{III}} = 0, \tag{99}$$

ahol A_{I}, A_{II} és A_{III} az $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ tenzor első, második és harmadik skaláris invariánsai (skaláris, mert skalár értékük van, és invariáns, mert bármely koordináta-rendszerben írjuk is fel a tenzort, az értékük nem változik). Kiszámítási módjuk az (98) részletes kifejtésével látható, és a következő módon történik

$$A_{\mathrm{I}} = A_{xx} + A_{yy} + A_{zz}, \tag{100}$$

azaz az első skaláris invariáns a tenzor főátlóbeli elemeinek összege,

$$A_{\mathrm{II}} = \begin{vmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{xx} & A_{xz} \\ A_{zx} & A_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zy} & A_{zz} \end{vmatrix}, \tag{101}$$

vagyis a főátlóbeli elemekhez tartozó aldeterminánsok összege, valamint

$$A_{\mathrm{III}} = \det \underline{\underline{\boldsymbol{A}}}, \tag{102}$$

tehát a harmadik skaláris invariáns pedig az $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ tenzor determinánsa. A (99) egyenletet megoldva λ-ra három gyököt kapunk, melyek $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ (megállapodás, hogy a gyökök közül a legnagyobb az első, a középső a második és a legkisebb a harmadik sajátérték). Miután a sajátértékek megvannak, a sajátvektorokat is meg kell határozni. Ehhez először is visszahelyettesítjük λ_1-et az (97) egyenletbe. Az ehhez tartozó $\vec{\boldsymbol{w}}_1$ vektor lesz az első főirány. Így kialakul egy három egyenletből álló három ismeretlenes egyenletrendszer $\vec{\boldsymbol{w}}_1$ három koordinátájára nézve. Ezek az egyenletek nem lesznek egymástól függetlenek, ezért csak két koordinátát lehet belőlük kifejezni, mint a 3. függvényét. Így kellene még egy egyenlet, ehhez pedig feltesszük, hogy a sajátvektorok legyenek egyúttal egységnyi hosszúságúak, vagyis álljon fenn, hogy

$$\sqrt{w_{1x}^2 + w_{1y}^2 + w_{1z}^2} = 1. \tag{103}$$

Így már meghatározható mind a 3 koordináta. Ugyanígy járunk el, amikor a $\vec{\boldsymbol{w}}_2$ sajátvektort akarjuk meghatározni, vagyis λ_2-t behelyettesítjük a (97) egyenletbe, ismét kapunk egy három egyenletből álló, három ismeretlenes egyenletet, és ismét szükségünk van még egy egyenletre

$$\sqrt{w_{2x}^2 + w_{2y}^2 + w_{2z}^2} = 1. \tag{104}$$

Ebből meghatározható $\vec{\boldsymbol{w}}_2$ is. Hasonló módon meghatározható a $\vec{\boldsymbol{w}}_3$ is, de a főirányok esetében fennáll, hogy ők szintén egy egymásra kölcsönösen merőleges, jobbsodrású rendszert alkotnak, vagyis fenn kell álljon, hogy $\vec{\boldsymbol{w}}_1 \times \vec{\boldsymbol{w}}_2 = \vec{\boldsymbol{w}}_3$. Ez utóbbi egyenlettel a 3. főirányt gyorsabban elő lehet állítani. Így az $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ tenzor mátrixa DDKR-ben és a főirányok koordináta-rendszerében is felírható:

$$\underset{(x,y,z)}{\left[\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\right]} = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \underset{(\vec{\boldsymbol{w}}_1,\vec{\boldsymbol{w}}_2,\vec{\boldsymbol{w}}_3)}{\left[\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}\right]} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \tag{105}$$

Példa: Adott a $\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}$ tenzor az xyz koordináta-rendszerben. Határozzuk meg a sajátértékeit és sajátvektorait!

$$\underset{(x,y,z)}{\left[\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}\right]} = \begin{bmatrix} -20 & 30 & 0 \\ 30 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}. \tag{106}$$

A sajátértékprobléma (97) alatti megfogalmazását kell felhasználni, értelemszerűen most a $\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}$ tenzorral, vagyis

$$\left[\underline{\underline{\boldsymbol{C}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{1}}}\right] \cdot \vec{\boldsymbol{w}} = \vec{\mathbf{0}}. \tag{107}$$

Ezután lehetne egyből a (99) karakterisztikus egyenletbe beírni a skaláris invariánsokat, majd megoldani a harmadfokú egyenletet. Azonban célszerű az együttható mátrix determinánsát megvizsgálni, mert előfordulhat, hogy egyszerűbb megoldásra vezet, mint a harmadfokú egyenlet megoldása. Nézzük az együttható mátrix, azaz a $\left[\underline{\underline{\boldsymbol{C}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{1}}}\right]$ tenzor determinánsát

$$\begin{aligned}\det\left|\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}-\lambda\underline{\underline{\mathbf{1}}}\right| = \begin{vmatrix} -20-\lambda & 30 & 0 \\ 30 & 60-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 100-\lambda \end{vmatrix} = \\ = (100-\lambda)\left[(-20-\lambda)(60-\lambda)-30^2\right] = 0.\end{aligned} \tag{108}$$

A determinánst az utolsó sora szerint fejtettük ki, így pedig kaptunk egy kéttagú szorzatot. Szorzat akkor 0 ha valamelyik tényezője 0. Azaz az alábbi két egyenletet kapjuk

$$\begin{aligned} 100-\lambda = 0, \\ (-20-\lambda)(60-\lambda)-900 = 0. \end{aligned} \tag{109}$$

Az első egyenletből látjuk, hogy az egyik gyök $\lambda = 100$, a másik két gyök a második egyenletből számítható ki. Ha a zárójeles tagokat összeszorozzuk, és összevonjuk őket, akkor egy másodfokú egyenletet kapunk λ-ra, tehát

$$\begin{aligned} -20\cdot 60 + 20\lambda - 60\lambda + \lambda^2 - 900 = 0, \\ \lambda^2 - 40\lambda - 2100 = 0. \end{aligned} \tag{110}$$

A másodfokú egyenlet megoldóképlete alapján

$$\lambda = \frac{40 \pm \sqrt{40^2 + 4\cdot 1\cdot 2100}}{2} = \begin{cases} 70 \\ -30 \end{cases}. \tag{111}$$

Így meg is határoztuk a 3 db sajátértéket, melyek így (a csökkenő sorrend szerinti megállapodás miatt):

$$\lambda_1 = 100; \qquad \lambda_2 = 70; \qquad \lambda_3 = -30. \tag{112}$$

Vagyis a $\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}$ tenzor a sajátvektorok koordináta-rendszerében felírva

$$\underset{(\vec{\boldsymbol{w}}_1,\vec{\boldsymbol{w}}_2,\vec{\boldsymbol{w}}_3)}{\left[\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}\right]} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 70 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \end{bmatrix}. \tag{113}$$

A következő lépés, hogy meghatározzuk a sajátvektorokat. A (107) egyenletbe visszahelyettesítjük λ_1-et, és így az egyenletben megjelenő sajátvektor a $\vec{\boldsymbol{w}}_1$ lesz, azaz

$$\left[\underline{\underline{\boldsymbol{C}}} - \lambda_1\underline{\underline{\mathbf{1}}}\right]\cdot\vec{\boldsymbol{w}}_1 = \vec{\mathbf{0}}, \tag{114}$$

ahol $\vec{\boldsymbol{w}}_1 = w_{1x}\vec{\boldsymbol{e}}_x + w_{1y}\vec{\boldsymbol{e}}_y + w_{1z}\vec{\boldsymbol{e}}_z$, melynek mindhárom koordinátája ismeretlen. Minden más ismert, így be tudjuk helyettesíteni

$$\begin{bmatrix} -20-100 & 30 & 0 \\ 30 & 60-100 & 0 \\ 0 & 0 & 100-100 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_{1x} \\ w_{1y} \\ w_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{115}$$

A bal oldalon álló együttható mátrix és a vektor szorzatát a mátrixszorzás szabályainak megfelelően kell elvégezni (első sort a vektor oszlopával, második sort a vektor oszlopával és a harmadik sort is a vektor oszlopával kell összeszorozni), így pedig a kapott 3 koordináta az egyenlet jobb oldalán álló $\vec{\mathbf{0}}$ vektor 3 koordinátájával kell megegyezzen, így kapunk 3 egyenletet 3 ismeretlennel

$$\begin{aligned} -120w_{1x} + 30w_{1y} + 0w_{1z} &= 0, \\ 30w_{1x} - 40w_{1y} + 0w_{1z} &= 0, \\ 0w_{1x} + 0w_{1y} + 0w_{1z} &= 0. \end{aligned} \tag{116}$$

Az utolsó egyenlet azonosság, a koordináták bármilyen értékére teljesül. Az első egyenletet elosztjuk 30-cal, átrendezve kapjuk:

$$w_{1y} = 4w_{1x}. \tag{117}$$

A második egyenletet osztjuk 10-zel, és szintén átrendezzük

$$4w_{1y} = 3w_{1x}. \tag{118}$$

Ha a (117) eredményt behelyettesítjük (118)-ba, akkor kapjuk, hogy $16w_{1x} = 3w_{1x}$. Ez az egyenlet csak akkor teljesül, ha $w_{1x} = 0$, ebből pedig következik, hogy $w_{1y} = 0$. Így lényegében azt kaptuk, hogy csak a w_{1z} értéke lehet tetszőleges. Tehát továbbra is fennáll, hogy nem tudtunk minden koordinátát egyértelműen meghatározni. Ehhez jön még hozzá az a feltevésünk, hogy a sajátvektor hossza legyen egységnyi (103). Ha behelyettesítjük a (103) egyenletbe a kapott eredményeket, kapjuk

$$\sqrt{w_{1z}^2} = 1 \quad \rightarrow \quad w_{1z} = 1. \tag{119}$$

(Elvileg megoldás lenne a $w_{1z} = -1$ is, de mivel az irány meghatározása a lényeg, ezért célszerű kiválasztani csak az egyik megoldást, a másik ugyanezen vektor ellentettje lenne.) Így tehát az első főirány sajátvektora: $\vec{\boldsymbol{w}}_1 = \vec{\boldsymbol{e}}_z$. Vagyis a $\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}$ tenzor első főiránya egybeesik a z tengellyel. (**Megjegyzés:** *a $\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}$ tenzor utolsó sorát és oszlopát megvizsgálva láthatjuk, hogy a 33-as elem, vagyis a C_{zz} elem sorában és oszlopában is 0-ák szerepelnek, ebből már lehet tudni, hogy a C_{zz} sajátérték lesz, csak azt nem lehet előre tudni, hogy melyik. Ebből következik, hogy az elemhez tartozó irány, vagyis az $\vec{\boldsymbol{e}}_z$ is főirány, vagy sajátvektor lesz. Mindkettőt bebizonyítottuk a sajátérték-feladat megoldásával, de csak ezután tudtuk meg, hogy a háromból melyik sajátérték a C_{zz} és így melyik sajátvektor az $\vec{\boldsymbol{e}}_z$.*)

Most számítsuk ki a λ_2 sajátértékhez tartozó $\vec{\boldsymbol{w}}_2$ sajátvektort. Az eljárás ugyanaz, mint az előbb, behelyettesítjük λ_2-t (107)-be

$$\left[\underline{\underline{\boldsymbol{C}}} - \lambda_2 \underline{\underline{\mathbf{1}}}\right] \cdot \vec{\boldsymbol{w}}_2 = \vec{\mathbf{0}}. \tag{120}$$

Itt $\vec{\boldsymbol{w}}_2 = w_{2x}\vec{\boldsymbol{e}}_x + w_{2y}\vec{\boldsymbol{e}}_y + w_{2z}\vec{\boldsymbol{e}}_z$, minden más mennyiség ismert. Így

$$\begin{bmatrix} -20-70 & 30 & 0 \\ 30 & 60-70 & 0 \\ 0 & 0 & 100-70 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{2x} \\ w_{2y} \\ w_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{121}$$

mely alapján újabb 3 db egyenletet tudunk felírni

$$\begin{aligned} -90w_{2x} + 30w_{2y} + 0w_{2z} &= 0, \\ 30w_{2x} - 10w_{2y} + 0w_{2z} &= 0, \\ 0w_{2x} + 0w_{2y} + 30w_{2z} &= 0. \end{aligned} \tag{122}$$

A harmadik egyenlet csak akkor teljesül, ha $w_{2z} = 0$. A másik két egyenletet ha megnézzük, az látszik, hogy az első egyenletet ha elosztjuk -3-mal, a második egyenletet kapjuk. Ez azt jelenti, hogy a két egyenlet nem független egymástól, tehát csak a két koordináta közötti kapcsolatot tudjuk felírni, a konkrét értéküket nem. Ha például a második egyenletet átrendezzük (ismétlem, ugyanez jön ki az elsőből is)

$$3w_{2x} = w_{2y} \qquad \rightarrow \qquad 3 = \frac{w_{2y}}{w_{2x}}. \tag{123}$$

Ismét azt mondjuk, hogy legyen a $\boldsymbol{\vec{w}_2}$ vektor egységvektor. Felhasználva az előző (123) egyenletet, illetve, hogy $w_{2z} = 0$

$$1 = \sqrt{w_{2x}^2 + w_{2y}^2} = \sqrt{w_{2x}^2 + (3w_{2x})^2} = \sqrt{10w_{2x}^2} \qquad \rightarrow \qquad w_{2x} = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0{,}316. \tag{124}$$

Ezt visszaírva a (123) egyenletbe kapjuk

$$w_{2y} = 3w_{2x} = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0{,}949. \tag{125}$$

Ismét csak a pozitív gyökkel foglalkoztunk, ez már elegendő az irány kijelöléséhez. Így a második főirány, vagy sajátvektor

$$\boldsymbol{\vec{w}}_2 = 0{,}316\boldsymbol{\vec{e}}_x + 0{,}949\boldsymbol{\vec{e}}_y. \tag{126}$$

Ugyanígy eljárva a harmadik főirányt is meg lehet határozni, de itt már célszerű kiindulni abból, hogy a három főirány egymásra kölcsönösen merőleges, jobbsodrású koordinátarendszert alkot ugyanúgy, mint az $\boldsymbol{\vec{e}}_x, \boldsymbol{\vec{e}}_y, \boldsymbol{\vec{e}}_z$ vektorhármas, így írható

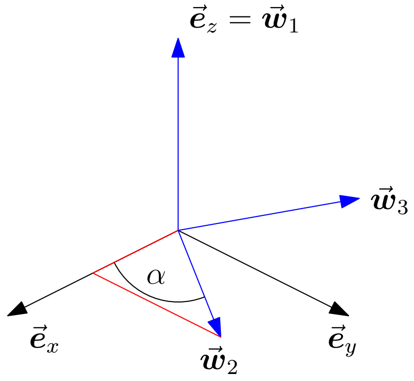
$$\boldsymbol{\vec{w}}_3 = \boldsymbol{\vec{w}}_1 \times \boldsymbol{\vec{w}}_2 = (\boldsymbol{\vec{e}}_z) \times (0{,}316\boldsymbol{\vec{e}}_x + 0{,}949\boldsymbol{\vec{e}}_y) = 0{,}316\boldsymbol{\vec{e}}_y - 0{,}949\boldsymbol{\vec{e}}_x. \tag{127}$$

Ellenőrizve az eredményeket, az első főirány épp a z tengely irányába mutat, így ha a másik kettő erre merőleges kell legyen, akkor csak az xy síkban helyezkedhetnek el. Jól látszik, hogy a 2-es és 3-as sajátvektornak is csak x és y koordinátája tér el zérustól, tehát valóban az xy síkban helyezkednek el. Koordinátasíkban pedig két vektor akkor merőleges egymásra, ha az egyik vektor koordinátáit megcseréljük, és az egyik koordináta előjelét megváltoztatjuk. Ez is teljesül a 2-es és 3-as sajátvektorok között. Szemléltettük a főirányokat a 6. ábrán. Összefoglalva tehát a $\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}$ tenzor sajátértékei és sajátvektorai:

$$\begin{gathered}
\lambda_1 = 100, \quad \lambda_2 = 70, \quad \lambda_3 = -30, \\
\boldsymbol{\vec{w}}_1 = \boldsymbol{\vec{e}}_z, \\
\boldsymbol{\vec{w}}_2 = 0{,}316\boldsymbol{\vec{e}}_x + 0{,}949\boldsymbol{\vec{e}}_y, \\
\boldsymbol{\vec{w}}_3 = -0{,}949\boldsymbol{\vec{e}}_x + 0{,}316\boldsymbol{\vec{e}}_y.
\end{gathered} \tag{128}$$

A 6. ábrán látható, hogy a $\boldsymbol{\vec{w}}_2$ vektor x tengellyel bezárt szöge α. Ezt a szöget a vektor y és x koordinátáinak hányadosából is ki lehet számítani

$$\tan\alpha = \frac{w_{2y}}{w_{2x}} = 3, \tag{129}$$



6. ábra. A $\underline{\underline{\boldsymbol{C}}}$ tenzor sajátvektorainak szemléltetése.

mely hányadost már felírtuk a (123) egyenletnél is. Ez alapján a szög $\alpha = 71{,}57°$. Ennek a szögnek a segítségével is meg lehet határozni a második sajátvektort. Megint abból kiindulva, hogy a vektor egységnyi hosszúságú, egyúttal a két koordináta és a vektor egy derékszögű háromszöget alkot (6. ábrán $\vec{\boldsymbol{w}}_2$ vektor és a pirossal jelölt oldalak mutatják a háromszöget), melyben a w_{2x} koordináta a szög melletti oldal, a w_{2y} koordináta pedig a szöggel szemközti oldal, írható

$$\vec{\boldsymbol{w}}_2 = 1 \cdot \cos 71{,}57° \vec{\boldsymbol{e}}_x + 1 \cdot \sin 71{,}57° \vec{\boldsymbol{e}}_y = 0{,}316 \vec{\boldsymbol{e}}_x + 0{,}949 \vec{\boldsymbol{e}}_y. \tag{130}$$

Tehát geometriai ismereteinket is felhasználva a (123) egyenletből ilyen módon is meghatározhatjuk a második sajátvektort.

2.10. Tenzorok kétszeres skaláris szorzása

Két tenzor kétszeres skaláris szorzásának eredménye egy skalár szám lesz. Ezt a műveletet a vektorok között értelmezett skalár szorzás mintájára kell elvégezni, vagyis az azonos pozícióban lévő elemeket összeszorozzuk, a szorzatokat pedig összeadjuk

$$\begin{gathered}\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{B}}} = A_{xx}B_{xx} + A_{xy}B_{xy} + A_{xz}B_{xz} + A_{yx}B_{yx} + \\ + A_{yy}B_{yy} + A_{yz}B_{yz} + A_{zx}B_{zx} + A_{zy}B_{zy} + A_{zz}B_{zz} = \lambda.\end{gathered} \tag{131}$$

Példa: Határozzuk meg az $\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}$ és $\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}$ tenzorok kétszeres skaláris szorzatát:

$$[\underline{\underline{\boldsymbol{A}}}] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}, \qquad [\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 12 \\ 2 & 3 & -2 \\ -4 & 2 & 7 \end{bmatrix}. \tag{132}$$

A (131) egyenletben szereplő definíció szerint írhatjuk

$$\begin{gathered}\underline{\underline{\boldsymbol{A}}} \cdot \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{B}}} = 3 \cdot 4 + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot 12 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) + \\ + 3 \cdot (-4) + (-5) \cdot 2 + 0 \cdot 7 = 6.\end{gathered} \tag{133}$$