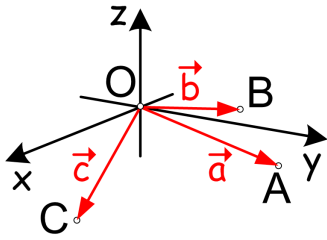


- 1 Adottak az xyz derékszögű Descartes-i koordináta-rendszerben (DDKR-ben) az $\vec{a} = (4\vec{e}_x + 6\vec{e}_y - \vec{e}_z)$ m, $\vec{b} = (-3\vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z)$ m és $\vec{c} = (-2\vec{e}_y - 5\vec{e}_z)$ m helyvektorok.



a. Határozza meg az alábbi műveletek eredményét!

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ? \quad \vec{a} \times \vec{b} = ? \quad \underline{\underline{A}} = \vec{a} \circ \vec{b} = ? \quad \underline{\underline{B}} = \vec{b} \circ \vec{a} = ?$$

$$\underline{\underline{F}} = \vec{a} \circ \vec{e}_x = ? \quad \underline{\underline{G}} = \vec{b} \circ \vec{e}_y = ? \quad \underline{\underline{H}} = \vec{c} \circ \vec{e}_z = ?$$

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{G}} + \underline{\underline{H}} = ?$$

$$\vec{d} = (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c} = ? \quad \vec{f} = (\vec{b} \circ \vec{a}) \cdot \vec{c} = ? \quad \vec{c} \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) = ? \quad \vec{c} \cdot (\vec{b} \circ \vec{a}) = ?$$

b. Bontsa fel az $\underline{\underline{A}}$ tenzort $\underline{\underline{A}}_{sz}$ szimmetrikus és $\underline{\underline{A}}_{asz}$ aszimmetrikus részekre!

Megoldás:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -5 \text{ m}^2; \vec{a} \times \vec{b} = (-5\vec{e}_x + 7\vec{e}_y + 22\vec{e}_z) \text{ m}^2; \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -12 & 4 & -4 \\ -18 & 6 & -6 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ m}^2; \underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} -12 & -18 & 3 \\ 4 & 6 & -1 \\ -4 & -6 & 1 \end{bmatrix} \text{ m}^2;$$

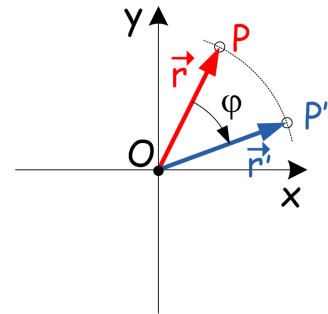
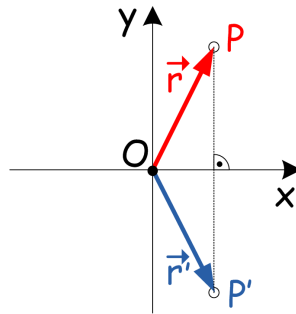
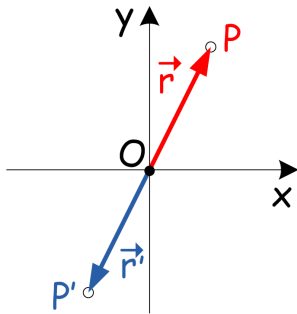
$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ m}; \underline{\underline{G}} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ m}; \underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \text{ m}; \underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 6 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix} \text{ m};$$

$$\vec{d} = (12\vec{e}_x + 18\vec{e}_y - 3\vec{e}_z) \text{ m}^3; \vec{f} = (21\vec{e}_x - 7\vec{e}_y + 7\vec{e}_z) \text{ m}^3;$$

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) = (21\vec{e}_x - 7\vec{e}_y + 7\vec{e}_z) \text{ m}^3; \vec{c} \cdot (\vec{b} \circ \vec{a}) = (12\vec{e}_x + 18\vec{e}_y - 3\vec{e}_z) \text{ m}^3;$$

$$\underline{\underline{A}}_{sz} = \begin{bmatrix} -12 & -7 & -0,5 \\ -7 & 6 & -3,5 \\ -0,5 & -3,5 & 1 \end{bmatrix} \text{ m}^2; \underline{\underline{A}}_{asz} = \begin{bmatrix} 0 & 11 & -3,5 \\ -11 & 0 & -2,5 \\ 3,5 & 2,5 & 0 \end{bmatrix} \text{ m}^2$$

- 2 Írja fel annak a leképzésnek $\underline{\underline{T}}$ jelű transzformációs mátrixát, amely az xy sík bármely pontjához annak (a) origóra vonatkozó szimmetriapontját, (b) x tengelyre vett szimmetriapontját, (c) $\varphi = 30^\circ$ -kal óramutató irányában z tengely körüli elforgatottját rendeli!

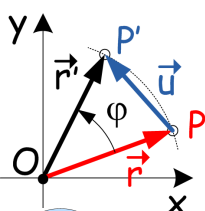


Megoldás: $\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};$

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

- 3 Adja meg annak a $\underline{\underline{T}}$ jelű, transzformációt leíró tenzornak a mátrixát,



a. amely az xy sík bármely \vec{r} helyvektorához a z tengely körüli pozitív, tetszőleges φ szöggel megvalósított elforgatásból származó \vec{u} elmozdulásvektort rendel!

b. Hogyan módosul a mátrix, ha $\varphi \ll 1$, azaz kicsi az elforgatás mértéke?

c. Hogyan változik a mátrix, ha az xyz tér tetszőleges helyvektorára értelmezzük a transzformációt?



d. Miként írható fel a transzformációs mátrix, ha a forgás egy tetszőleges origón áthaladó tengely körül pozitívnek és $\varphi \ll 1$ mértékűnek tekintett?

Megoldás:
$$[\underline{T}] = \begin{bmatrix} (\cos\varphi - 1) & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & (\cos\varphi - 1) \end{bmatrix}; \quad [\underline{T}] = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi \\ \varphi & 0 \end{bmatrix};$$

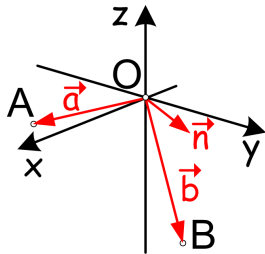
$$[\underline{T}] = \begin{bmatrix} (\cos\varphi - 1) & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & (\cos\varphi - 1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [\underline{T}] = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix}$$

4 Adja meg az xyz derékszögű Descartes-i koordináta-rendszer bázisvektorai között értelmezett diadikus szorzatok mátrixait, illetve ezek segítségével értelmezze az egységtenzort!

Megoldás:

$$[\underline{e}_x \circ \underline{e}_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [\underline{e}_x \circ \underline{e}_y] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{stb.}; \quad [\underline{1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{1} = \underline{e}_x \circ \underline{e}_x + \underline{e}_y \circ \underline{e}_y + \underline{e}_z \circ \underline{e}_z$$

5 Ismeretes az $\vec{a} = (\vec{e}_x - 2\vec{e}_y - \vec{e}_z)$ m, $\vec{b} = (2\vec{e}_x + 4\vec{e}_y - 6\vec{e}_z)$ m és $\vec{n} = \vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z$ vektor az xyz koordináta-rendszerben.



a. Írja fel $\underline{F} = \vec{a} \circ \vec{b}$ tenzor xyz koordináta-rendszerbeli $[\underline{F}]$ mátrixát!

b. Számítsa ki $\vec{g}_x = \underline{F} \cdot \vec{e}_x$, $\vec{g}_y = \underline{F} \cdot \vec{e}_y$ és $\vec{g}_z = \underline{F} \cdot \vec{e}_z$ szorzatokat!

c. Határozza meg az $\vec{n} \cdot \underline{F}$ és $\underline{F} \cdot \vec{n}$ szorzatokat mátrixos formalizmus, illetve a diadikus szorzatok felbontásának alkalmazása mellett!

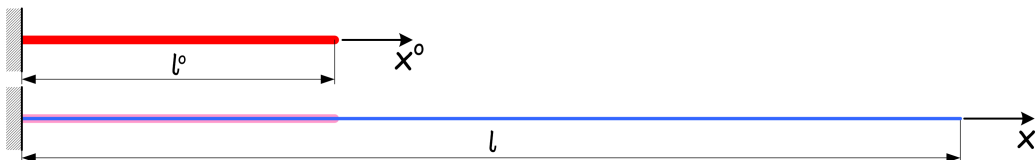
Megoldás:

$$[\underline{F}] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -4 & -8 & 12 \\ -2 & -4 & 6 \end{bmatrix} \text{ m}^2; \quad \vec{g}_x = (2\vec{e}_x - 4\vec{e}_y - 2\vec{e}_z) \text{ m}^2; \quad \vec{g}_y = (4\vec{e}_x - 8\vec{e}_y - 4\vec{e}_z) \text{ m}^2;$$

$$\vec{g}_z = (-6\vec{e}_x + 12\vec{e}_y + 6\vec{e}_z) \text{ m}^2; \quad [\vec{n} \cdot \underline{F}] = [\vec{n}]^T [\underline{F}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ m}^2; \quad [\underline{F} \cdot \vec{n}] = [\underline{F}] [\vec{n}] = \begin{bmatrix} 12 \\ -24 \\ -12 \end{bmatrix} \text{ m}^2$$

$$\vec{n} \cdot \underline{F} = \vec{n} \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) = (\vec{n} \cdot \vec{a}) \vec{b} = \vec{0}; \quad \underline{F} \cdot \vec{n} = (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{n} = \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{n}) = (12\vec{e}_x - 24\vec{e}_y - 12\vec{e}_z) \text{ m}^2$$

6 Az x tengellyel párhuzamos és egyik végén befogott $l^o = 100$ mm hosszúságú vékony gumiszál pontjainak koordinátáit x^o jelöli ($0 \leq x^o \leq l^o$). A gumiszálat háromszorosára nyújtjuk. Az egyenletesen megnyúlt gumiszál pontjainak koordinátáit x jelöli: $0 \leq x \leq l$, ahol l az alakváltozás utáni hossz.



a. Írja fel a gumiszál l^o és l hosszai, majd a gumiszálon vett tetszőleges anyagi pont x^o és x koordinátái közötti összefüggést! Tüntesse fel egy magyarázó ábrán az $x^o = 50$ mm koordinátájú anyagi pont helyét mindkét állapotban! Ívhosszat jelöl-e x^o az alakváltozott szálon?

b. Határozza meg a gumiszál végpontjának az elmozdulását, majd írja fel az x^o koordinátájú pont elmozdulását leíró $u(x^o)$ elmozdulás-függvényt!

c. Számítsa ki a $\frac{du}{dx^o}$ és a $\frac{du}{dx}$ deriváltak értékeit! Döntse el és indokolja, hogy a gumiszál nagy-, vagy kismértékű alakváltozást szenvedett!

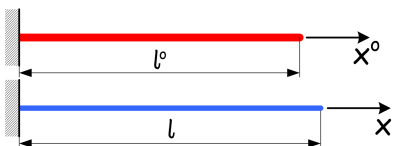
d. Számítsa ki a nyúlás mértékét a végpontban, majd a tetszőleges x^o koordinátájú pontban!

e. Számítsa ki a következő fajlagos (relatív) nyúlások értékeit: mérnöki nyúlás, valódi nyúlás, a Lagrange és Euler, valamint a logaritmikus (Hencky-féle) nyúlás!

Megoldás: $l = 3l^o = 300 \text{ mm}$; $x(x^o) = 3x^o$; $x^o(x) = \frac{x}{3}$; $u(l^o) = 200 \text{ mm}$; $u(x^o) = 2x^o$; $\frac{du}{dx^o} = 2$; $\frac{du}{dx} = \frac{2}{3}$;

A gumiszál nagymértékű alakváltozást szenvedett 1D-ben. $\epsilon^o = 2$; $\epsilon = \frac{2}{3}$; $\epsilon^L = 4$; $\epsilon^E = \frac{4}{9}$; $\epsilon^{\log} = \ln 3 = 1,0986122$

7 Az x tengellyel párhuzamos és egyik végén befogott $l^o = 100 \text{ mm}$ hosszúságú vékony acélszál (gitárhúr) pontjainak koordinátáit x^o jelöli ($0 \leq x^o \leq l^o$). Alakváltozás során az acélszál az 1,003-szorosára nyúlik és l jelöli az alakváltozás utáni hosszt.



a. Írja fel az acélszál l^o és l hosszai, majd az acélszálon vett tetszőleges anyagi pont x^o és x koordinátái közötti összefüggést! Tüntesse fel egy magyarázó ábrán az $x^o = 50 \text{ mm}$ koordinátájú anyagi pont helyét mindkét állapotban! Ívhosszat jelöl-e x^o az alakváltozott szálon?

b. Határozza meg az acélszál végpontjának az elmozdulását, majd írja fel az x^o koordinátájú pont elmozdulását leíró $u(x^o)$ elmozdulás-függvényt!

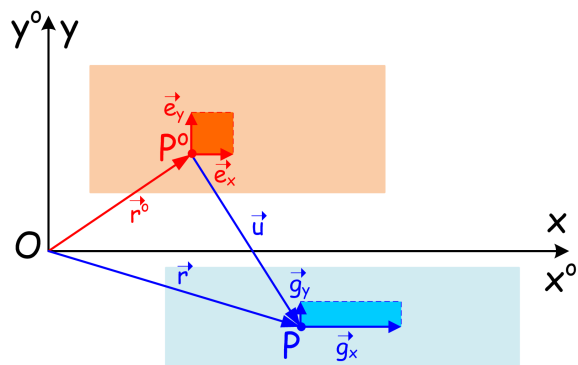
c. Számítsa ki a $\frac{du}{dx^o}$ és a $\frac{du}{dx}$ deriváltak értékeit! Döntse el és indokolja, hogy az acélszál nagy-, vagy kismértékű alakváltozást szenvedett!

d. Számítsa ki a nyúlás mértékét a végpontban, majd a tetszőleges x^o koordinátájú pontban!

e. Számítsa ki a következő fajlagos (relatív) nyúlások értékeit: mérnöki nyúlás, valódi nyúlás, a Lagrange és Euler, valamint a logaritmikus (Hencky-féle) nyúlás!

Megoldás: $l = 1,003l^o = 100,3 \text{ mm}$; $x(x^o) = 1,003x^o$; $x^o(x) = \frac{x}{1,003}$; $u(l^o) = 0,3 \text{ mm}$; $u(x^o) = 0,003x^o$; $\frac{du}{dx^o} = 0,003$; $\frac{du}{dx} = 0,002991$; Az acélszál kismértékű alakváltozást szenvedett 1D-ben. $\epsilon^o = 0,003$; $\epsilon = 0,002991$; $\epsilon^L = 0,0030045$; $\epsilon^E = 0,0029865$; $\epsilon^{\log} = \ln 1,003 = 0,0029955$

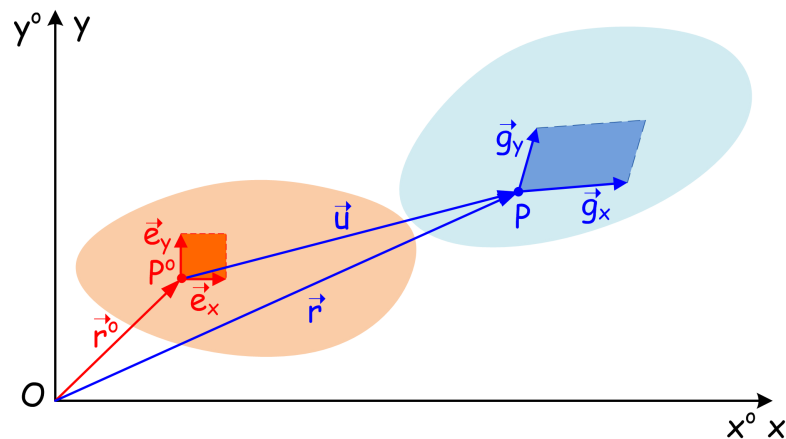
8 Egy szilárd test \hat{P} jelű anyagi pontja alakváltozás előtt a $P^o(x^o, y^o)$ koordinátájú geometriai pontban, alakváltozás után $P(x, y)$ koordinátájú geometriai pontban helyezkedik el. A P^o pontbeli \vec{e}_x és \vec{e}_y egységvektorok által kifeszített elemi négyzet pontjai alakváltozás után a $\vec{g}_x = 3\vec{e}_x$ és $\vec{g}_y = 0,5\vec{e}_y$ vektorok által kifeszített téglalap pontjait foglalják el az ábrán vázolt módon.



- a. Írja fel a \hat{P} anyagi pont elemi környezetének alakváltozását jellemző $\underline{\underline{F}}$ alakváltozási gradiens tenzor mátrixát, majd adja meg az $\underline{\underline{F}}$ tenzort invariáns alakban!
- b. Írja fel az alakváltozási gradiens és $\vec{u} \circ \nabla^o$ elmozdulási gradiens tenzor közötti kapcsolatot, majd határozza meg $\vec{u} \circ \nabla^o$ mátrixát! Szemléltesse az $\vec{u} \circ \nabla^o$ tenzor koordinátáit és állapítsa meg, hogy a vizsgált pontban az alakváltozás nagy-, vagy kismértékű!
- c. Számítsa ki a \hat{P} ponton áthaladó x^o és y^o irányú anyagi vonalak nyúlásait és a kezdeti hosszakra vonatkoztatott fajlagos nyúlásait (mérnöki nyúlások), valamint a vonalak egymáshoz viszonyított szögtorzulását!
- d. Számítsa ki a P^o pontbeli $\vec{e}_n = 0,6\vec{e}_x + 0,8\vec{e}_y$ irányú anyagi vonal alakváltozás utáni \vec{g}_n érintő vektorát, majd határozza meg az anyagi vonal nyúlását és fajlagos nyúlását a kezdeti hosszra vonatkoztatva!
- e. Számítsa ki a P^o pontbeli \vec{e}_n irányú anyagi vonal és a rá merőleges $\vec{e}_m = -0,8\vec{e}_x + 0,6\vec{e}_y$ irányú anyagi vonal relatív szögtorzulását!

Megoldás: $\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$; $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} + \vec{u} \circ \nabla^o = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{U}}$; $\underline{\underline{U}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -0,5 \end{bmatrix}$; nagymértékű alakváltozás;
 $\lambda_x = 3$; $\lambda_y = -0,5$; $\varepsilon_x^o = 2$; $\varepsilon_y^o = -0,5$; $\gamma_{xy} = 0$; $\lambda_n = 1,8439$; $\varepsilon_n^o = 0,8439$; $\gamma_{mn} = -70,35^\circ = -1,2278 \text{ rad}$

- 9 Egy szilárd test \hat{P} jelű anyagi pontja alakváltozás előtt a $P^o(x^o, y^o)$ koordinátájú geometriai pontban, alakváltozás után a $P(x, y)$ koordinátájú geometriai pontban helyezkedik el. A P^o pontbeli \vec{e}_x és \vec{e}_y egységvektorok által kifeszített elemi négyzet pontjai alakváltozás után a $\vec{g}_x = 2,5\vec{e}_x + 0,5\vec{e}_y$ és $\vec{g}_y = 0,2\vec{e}_x + 1,4\vec{e}_y$ vektorok által kifeszített paralelogramma pontjait foglalják el az ábrán vázolt módon.



- a. Írja fel a \hat{P} anyagi pont elemi környezetének alakváltozását jellemző $\underline{\underline{F}}$ alakváltozási gradiens tenzor mátrixát, majd adja meg az $\underline{\underline{F}}$ tenzort invariáns alakban!
- b. Írja fel az alakváltozási gradiens és $\vec{u} \circ \nabla^o$ elmozdulási gradiens tenzor közötti kapcsolatot, majd határozza meg $\vec{u} \circ \nabla^o$ mátrixát! Szemléltesse az $\vec{u} \circ \nabla^o$ tenzor koordinátáit és állapítsa meg, hogy a vizsgált pontban az alakváltozás nagy-, vagy kismértékű!
- c. Számítsa ki a \hat{P} ponton áthaladó x^o és y^o irányú anyagi vonalak nyúlásait és a kezdeti hosszakra vonatkoztatott fajlagos nyúlásait (mérnöki nyúlások), valamint a vonalak egymáshoz viszonyított szögtorzulását!

d. Számítsa ki a P^o pontbeli $\vec{e}_n = 0,6\vec{e}_x + 0,8\vec{e}_y$ irányú anyagi vonal alakváltozás utáni \vec{g}_n érintő vektorát, majd határozza meg az anyagi vonal nyúlását és fajlagos nyúlását a kezdeti hossza vonatkoztatva!

e. Számítsa ki a P^o pontbeli \vec{e}_n irányú anyagi vonal és a rá merőleges $\vec{e}_m = -0,8\vec{e}_x + 0,6\vec{e}_y$ irányú anyagi vonal relatív szögtorzulását!

Megoldás: $[\underline{F}] = \begin{bmatrix} 2,5 & 0,2 \\ 0,5 & 1,4 \end{bmatrix}$; $\underline{F} = \underline{1} + \vec{u} \circ \nabla = \underline{1} + \underline{U}$; $[\underline{U}] = \begin{bmatrix} 1,5 & 0,2 \\ 0,5 & 0,4 \end{bmatrix}$; nagymértékű, alakváltozás; $\lambda_x = 2,5495$; $\lambda_y = 1,4142$; $\varepsilon_x^o = 1,5495$; $\varepsilon_y^o = 0,4142$; $\gamma_{xy} = 19,44^\circ = 0,3393$ rad; $\lambda_n = 2,1845$; $\varepsilon_n^o = 1,1845$; $\gamma_{mn} = -36,28^\circ = -0,6333$ rad

10 Egy szilárd test alakváltozása során a P^o pontbeli \vec{e}_x , \vec{e}_y és \vec{e}_z egységvektorok által kifeszített egységnyi oldalú kocka a P pontbeli $\vec{g}_x = 1,002\vec{e}_x + 0,004\vec{e}_z$, $\vec{g}_y = 1,002\vec{e}_y - 0,002\vec{e}_z$ és $\vec{g}_z = -0,002\vec{e}_x + 0,996\vec{e}_z$ vektorok által kifeszített paralelepipedoná torzul.

a. Írja fel az \underline{F} alakváltozási gradiens és az \underline{U} elmozdulási gradiens tenzorok mátrixait! Állapítsa meg, hogy a vizsgált pontban az alakváltozás nagy-, vagy kismértékű, majd szemléltesse az elmozdulás gradiens tenzor mátrixát elemi triéderen!

b. Határozza meg $P \approx P^o$ pontbeli \underline{A} alakváltozási tenzor mátrixát és nevezze meg a benne megjelenő mennyiségeket!

c. Határozza meg $P \approx P^o$ pontbeli $\underline{\Psi}$ forgató tenzor mátrixát, majd határozza meg $\vec{\phi}$ szögel-fordulás vektort!

d. Határozza meg $\vec{e}_n = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_z$ és az $\vec{e}_m = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_z$ egységvektorokhoz tartozó ε_n és ε_m fajlagos nyúlásokat és γ_{mn} fajlagos szögtorzulást!

Megoldás:

$$[\underline{F}_P] = \begin{bmatrix} 1,002 & 0 & -0,002 \\ 0 & 1,002 & 0 \\ 0,004 & -0,002 & 0,996 \end{bmatrix}; [\underline{U}_P] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix} \times 10^{-3}; \text{Kismértékű alakváltozás}; ([\underline{U}] \text{ minden eleme } \ll 1);$$

$$[\underline{A}_P] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \times 10^{-3}; [\underline{\Psi}_P] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-3}; \vec{\phi} = (-\vec{e}_x - 3\vec{e}_y) \cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_n = 0; \varepsilon_m = -2 \cdot 10^{-3}; \gamma_{mn} = 6 \cdot 10^{-3}$$

11 Egy szilárd test alakváltozás utáni elmozdulási állapotát leíró $\vec{u}(\vec{r}) = \vartheta z \vec{e}_z \times \vec{R}$ elmozdulásmező ismert. Legyen $\vartheta = 2 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{mm}}$ és $\vec{R} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$.

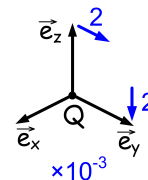
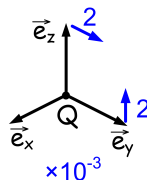
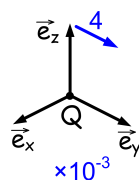
a. Írja fel az \underline{U}_Q elmozdulás gradiens, valamint az \underline{A}_Q alakváltozási és $\underline{\Psi}_Q$ forgató tenzor mátrixát a szilárd test $\vec{r}_Q = (2\vec{e}_x)$ mm helyvektor által kijelölt Q pontjában!

b. Adja meg az $\vec{e}_n = 0,6\vec{e}_y + 0,8\vec{e}_z$ irányhoz tartozó ε_n fajlagos nyúlást!

c. Szemléltesse a tenzorok mátrixait elemi triéder segítségével!

Megoldás:

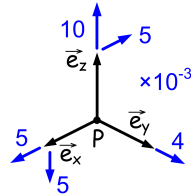
$$[\underline{U}_Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-3}; [\underline{A}_Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-3}; [\underline{\Psi}_Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-3}; \varepsilon_n = 1,92 \cdot 10^{-3}$$



- 12** Egy szilárd test P pontjában az alábbi alakváltozási jellemzők ismertek:
 $\varepsilon_x = 5 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_y = 4 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_z = 10^{-2}$; $\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = 0$; $\gamma_{zx} = \gamma_{xz} = -10^{-2}$.

- a. Szemléltesse elemi triéderen a P pontbeli alakváltozási állapotot!
 b. Számítsa ki ε_n fajlagos nyúlást és γ_{yn} fajlagos szögtorzulást, ha $\vec{e}_n = 0,8\vec{e}_x + 0,6\vec{e}_z$!

Megoldás:



$$[\underline{A}_P] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & 10 \end{bmatrix} \times 10^{-3}; \varepsilon_n = 2 \cdot 10^{-3}; \gamma_{yn} = 0$$

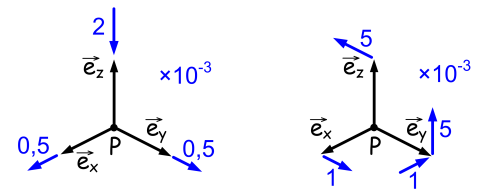
- 13** Egy szilárd test elmozdulásmezője az $\vec{u}(\vec{r}) = -\frac{\nu}{R}xy\vec{e}_x + \frac{1}{2R}(\nu x^2 - \nu y^2 - z^2)\vec{e}_y + \frac{1}{R}yz\vec{e}_z$ alakban adott. Legyen $R = 10^3$ mm és $\nu = 0,25$.

- a. Határozza meg az $\vec{r}_P = (4\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + 5\vec{e}_z)$ mm helyvektorral kijelölt P pontban az \underline{U}_P elmozdulási és az \underline{F}_P alakváltozási gradienst!
 b. Írja fel a P pontbeli \underline{A}_P alakváltozási és $\underline{\Psi}_P$ forgató tenzor mátrixát és szemléltesse elemi triéderen, majd határozza meg $\vec{\phi}$ szögelfordulás vektort!
 c. Határozza meg $\vec{e}_n = \frac{1}{2}\vec{e}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y$ és az $\vec{e}_m = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x + \frac{1}{2}\vec{e}_y$ egységvektorokhoz tartozó ε_n és ε_m fajlagos nyúlásokat és γ_{mn} fajlagos szögtorzulást!

Megoldás:

$$[\underline{U}_P] = \begin{bmatrix} 0,5 & -1 & 0 \\ 1 & 0,5 & -5 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix} \times 10^{-3}; [\underline{F}_P] = \begin{bmatrix} 1,0005 & -0,001 & 0 \\ 0,001 & 1,0005 & -0,005 \\ 0 & 0,005 & 0,998 \end{bmatrix};$$

$$[\underline{A}_P] = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \times 10^{-3}; [\underline{\Psi}_P] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-3};$$



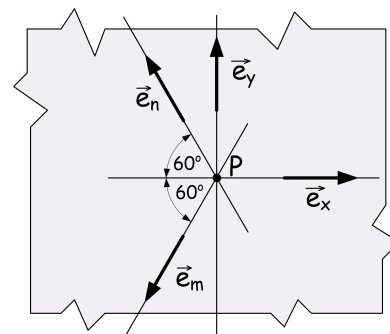
$$\vec{\phi} = (5\vec{e}_x + \vec{e}_z) \cdot 10^{-3}; \varepsilon_n = 0,5 \cdot 10^{-3}; \varepsilon_m = 0,5 \cdot 10^{-3}; \gamma_{mn} = 0$$

- 14** A próbatest felszínén elhelyezkedő P pontban $\varepsilon_x = 2 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_n = 0,5 \cdot 10^{-4}$ és $\varepsilon_m = 4 \cdot 10^{-4}$ fajlagos nyúlásokat mérünk az ábrán jelzett irányokban. A P ponton áthaladó, síkra merőleges z tengely alakváltozási főtengele! Határozza meg az ε_y fajlagos nyúlást és γ_{xy} fajlagos szögtorzulást!

Megoldás:

$$\vec{e}_n = -\frac{1}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y; \vec{e}_m = -\frac{1}{2}\vec{e}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y;$$

$$\varepsilon_y = 2,3 \cdot 10^{-4}; \gamma_{xy} = \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot 10^{-4}$$



15 A szilárd test P pontjában ismeretes az elmozdulási gradiens tenzor mátrixa:

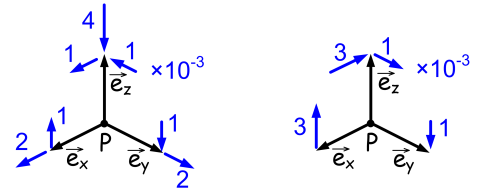
$$[\underline{U}_P] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix} \times 10^{-3}.$$

a. Határozza meg az \underline{A}_P alakváltozási és $\underline{\Psi}_P$ forgató tenzor mátrixát és szemléltesse elemi triéderen!

b. Határozza meg $\vec{e}_n = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_z$ és az $\vec{e}_m = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_z$ egységvektorokhoz tartozó ε_n és ε_m fajlagos nyúlásokat és γ_{mn} fajlagos szögtorzulást!

Megoldás:

$$[\underline{A}_P] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \times 10^{-3}; [\underline{\Psi}_P] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-3};$$



$$\varepsilon_n = 0; \varepsilon_m = -2 \cdot 10^{-3}; \gamma_{mn} = 6 \cdot 10^{-3}$$

16 Az xyz koordináta-rendszer \vec{e}_x , \vec{e}_y és \vec{e}_z egységvektorai által meghatározott egységnyi oldalú kocka deformációját leíró alakváltozási gradiens adott:

$$[\underline{F}] = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a. Írja fel az alakváltozás utáni állapotban az egységvektorokból előálló \vec{g}_x , \vec{g}_y és \vec{g}_z érintőket, majd ábrázolja a kocka alakváltozás előtti és utáni helyzetét, ha a kocka origójával egybeeső sarokpontja alakváltozás közben nem mozdul el!

b. Határozza meg az \underline{A} és $\underline{\Psi}$ tenzorok mátrixát és a $\vec{\phi}$ szögelfordulás vektort!

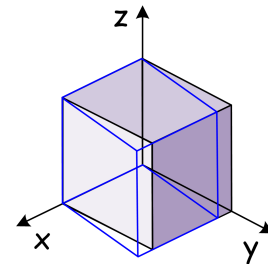
c. Milyen feltétel esetén érvényes a linearizálás során alkalmazott $\underline{F}^T \underline{F} \approx \underline{1} + 2\underline{A}$ közelítés?

Megoldás:

$$\vec{g}_x = \vec{e}_x; \vec{g}_y = \gamma\vec{e}_x + \vec{e}_y; \vec{g}_z = \vec{e}_z;$$

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\gamma & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; [\underline{\Psi}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\gamma & 0 \\ -\frac{1}{2}\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \vec{\phi} = -\frac{1}{2}\gamma\vec{e}_z;$$

ha $1 + \gamma^2 \approx 1$, azaz $\gamma \ll 1$



17 Ismert az $\vec{n} = 0,8\vec{e}_y + 0,6\vec{e}_z$ normálisú elemi felület P pontjában a felületen megoszló ER $\vec{p}_n = (-400\vec{e}_x + 300\vec{e}_y + 100\vec{e}_z) \frac{N}{\text{mm}^2}$ sűrűségvektora, azaz a feszültségvektor.

Határozza meg az elemi felület P pontjában a

a. σ_n normálfeszültséget!

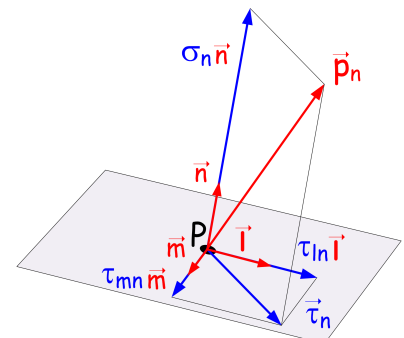
b. $\vec{\tau}_n$ csúsztató feszültségvektort!

c. τ_{mn} csúsztató feszültséget, ha $\vec{m} = -0,6\vec{e}_y + 0,8\vec{e}_z$!

Megoldás:

$$\sigma_n = 300 \text{ MPa}; \vec{\tau}_n = (-400\vec{e}_x + 60\vec{e}_y - 80\vec{e}_z) \text{ MPa};$$

$$\tau_{mn} = -100 \text{ MPa}$$



- 18** Határozza meg az $\vec{n} = 0,5\vec{e}_x + 0,5\vec{e}_y + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_z$ normálisú sík P pontjában ébredő $\vec{p}_n = (581\vec{e}_x - 100\vec{e}_y + 200\vec{e}_z)$ MPa feszültségvektor σ_n , τ_{mn} és τ_{ln} összetevőit, ha $\vec{m} = -0,5\vec{e}_x - 0,5\vec{e}_y + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_z$ és $\vec{l} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_x - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e}_y$!

Megoldás: $\sigma_n = 381,92$ MPa; $\tau_{mn} = -99,1$ MPa; $\tau_{ln} = 481,5$ MPa

- 19** Egy szilárd test P pontjában ismert a \underline{T}_P feszültségi tenzor xyz koordináta-rendszerben tekintett mátrixa:

$$[\underline{T}_P] = \begin{bmatrix} 400 & -500 & 0 \\ -500 & 0 & 500 \\ 0 & 500 & -500 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

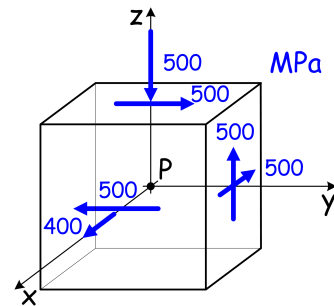
a. Határozza meg a P pontban az \vec{e}_x , \vec{e}_y és \vec{e}_z normálisú elemi felülethez tartozó \vec{p}_x , \vec{p}_y és \vec{p}_z feszültségvektorokat!

b. Írja fel az $\vec{n} = 0,8\vec{e}_y + 0,6\vec{e}_z$ normálisú elemi felületen a \vec{p}_n feszültségvektort, a σ_n normál-feszültséget és a $\vec{\tau}_n$ csúsztatófeszültség vektort!

c. Szemléltesse a P pont feszültségi állapotát elemi kockán!

Megoldás:

$$\begin{aligned} \vec{p}_x &= (400\vec{e}_x - 500\vec{e}_y) \text{ MPa;} \\ \vec{p}_y &= (-500\vec{e}_x + 500\vec{e}_z) \text{ MPa;} \\ \vec{p}_z &= (500\vec{e}_y - 500\vec{e}_z) \text{ MPa;} \\ \sigma_n &= 300 \text{ MPa;} \\ \vec{\tau}_n &= (-400\vec{e}_x + 60\vec{e}_y - 80\vec{e}_z) \text{ MPa} \end{aligned}$$



- 20** Adott a szilárd test P pontjában a \underline{T}_P feszültségi tenzor xyz koordináta-rendszerbeli mátrixa:

$$[\underline{T}_P] = \begin{bmatrix} 80 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & -32 \\ 0 & -32 & -80 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

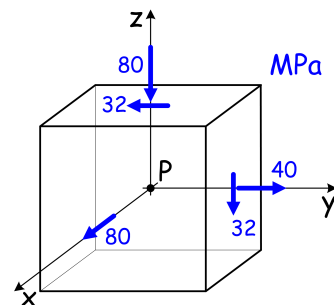
a. Írja fel a feszültségi tenzor diadikus előállítását és szemléltesse a feszültségi állapotot az elemi kockán!

b. Számítsa ki az $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{17}}(4\vec{e}_y - \vec{e}_z)$ és $\vec{m} = \frac{1}{\sqrt{17}}(\vec{e}_y + 4\vec{e}_z)$ normálisú felületeken ébredő σ_n és σ_m normál-feszültségeket és τ_{mn} nyírófeszültséget!

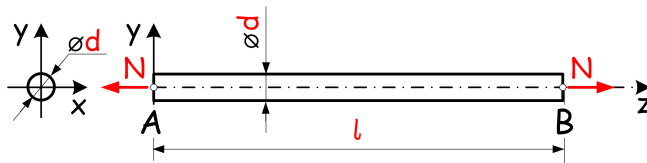
Megoldás:

$$\underline{T}_P = [80\vec{e}_x \circ \vec{e}_x + (40\vec{e}_y - 32\vec{e}_z) \circ \vec{e}_y + (-32\vec{e}_y - 80\vec{e}_z) \circ \vec{e}_z] \text{ MPa;}$$

$$\begin{aligned} \sigma_n &= 48 \text{ MPa;} \\ \sigma_m &= -88 \text{ MPa;} \\ \tau_{mn} &= 0 \end{aligned}$$



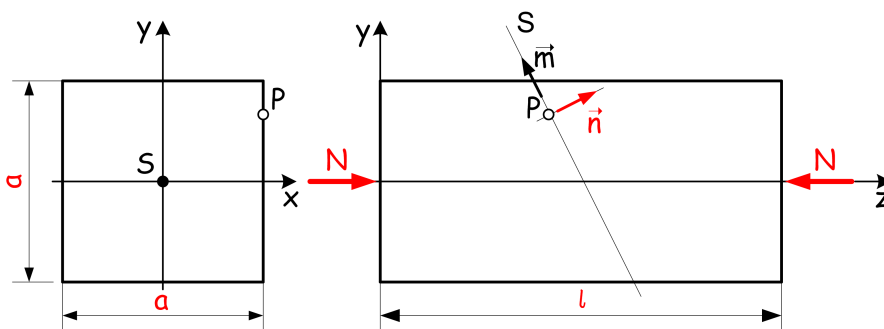
- 21** Egy húzásra igénybevett körkeresztmetszetű, prizmatikus rúd \overline{AB} szakaszának $l = 250$ mm terheletlen hossza és $d = 25$ mm kezdeti átmérője ismert.



- Mekkora lesz a lineárisan rugalmasnak tekintett rúdszakasz $N_2 = 50$ kN húzóerő esetén adódó l_2 hossza, ha $N_1 = 100$ kN húzóerő mellett $l_1 = 250,27$ mm hossz mérhető?
- Mekkora az N_3 húzóerő értéke, ha mellette a rúd pontjaiban $\sigma_{z3} = 80$ MPa feszültség ébred?
- Határozza meg a megismert adatokból a rúdanyag E rugalmassági modulusát!

Megoldás: $l_2 = 250,135$ mm; $N_3 = 39,2699$ kN; $E = 188628$ MPa

- 22** A négyzet keresztmetszetű, prizmatikus ($a = 50$ mm; $l = 100$ mm) zömök rúd az ábrán látható módon 600 kN nagyságú erőknek kitéve.

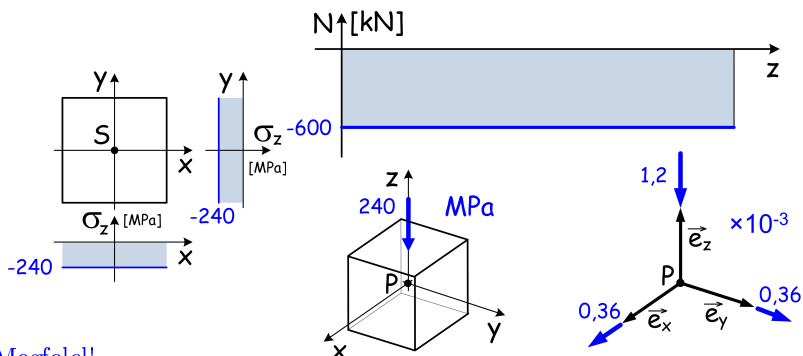


- Állapítsa meg az igénybevételt és adja meg a vonatkozó igénybevételi ábrát!
- Rajzolja meg a $z = 0$ keresztmetszetben ébredő feszültségeloszlást az x és y koordinátatengelyek mentén és adja meg az eloszlást leíró függvényt az x és y koordináták függvényében!
- Határozza meg a $P(25; 12, 5; 40)$ mm pontban a \underline{T}_P feszültségi tenzor mátrixát és szemléltesse azt a P pont környezetéből kivett elemi kockán!
- Határozza meg az \underline{A}_P alakváltozási tenzor mátrixát és szemléltesse azt a P ponthoz kötött elemi triéderen, ha $E = 200$ GPa és $\nu = 0,3$!
- Írja fel a P ponton átmenő $\vec{n} = 0,6\vec{e}_y + 0,8\vec{e}_z$ normálisú S síkon ébredő σ_n normálfeszültséget és a síkba eső, ábrán berajzolt \vec{m} irányú τ_{mn} nyírófeszültséget!
- Ellenőrizze a rudat feszültségcsúcsra, ha $\sigma_{jell} = 400$ MPa és $n = 1,6$!

Megoldás: $\sigma_z(x, y) = -240$ MPa=áll.;

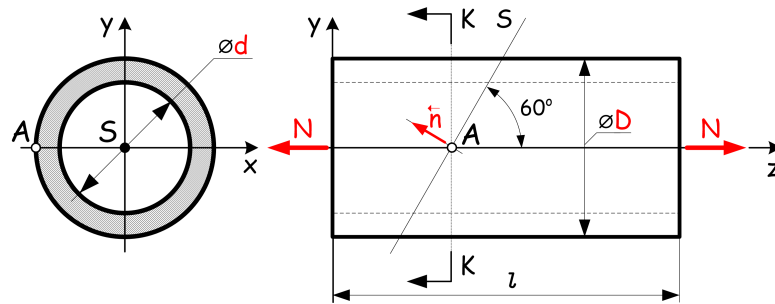
$$\underline{T}_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -240 \end{bmatrix} \text{ MPa};$$

$$\underline{A}_P = \begin{bmatrix} 0,36 & 0 & 0 \\ 0 & 0,36 & 0 \\ 0 & 0 & -1,2 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$



$\sigma_n = -153,6$ MPa; $\tau_{mn} = 115,2$ MPa; Megfelel!

- 23** Az $N = 30 \text{ kN}$ húzó igénybevételnek kitett, l hosszúságú, $D = 40 \text{ mm}$ külső és $d = 36 \text{ mm}$ belső átmérővel rendelkező csőszakasz anyagának $E = 200 \text{ GPa}$ Young-féle rugalmassági modulusa és $\nu = 0,25$ Poisson tényezője ismert.



a. Ábrázolja jelleghelyesen az x és y koordinátatengelyek menti feszültségeloszlásokat és határozza meg az A pontbeli \underline{T}_A feszültségi tenzor mátrixát, adja meg diadikus alakban és szemléltesse azt az A pont környezetéből kivett koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú elemi kockán!

b. Írja fel az A pontra illeszkedő \vec{n} normálisú elemi felületen a \vec{p}_n feszültségvektort, a σ_n normálfeszültséget és a $\vec{\tau}_n$ csúsztatófeszültség vektort!

Megoldás:

$$\sigma_z(A) = 125,65 \text{ MPa};$$

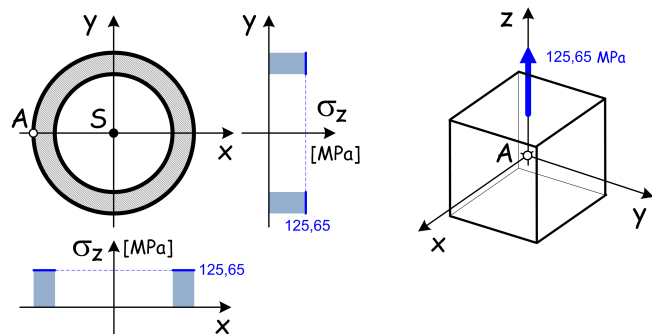
$$\underline{T}_A = (125,65 \vec{e}_z \otimes \vec{e}_z) \text{ MPa};$$

$$[\underline{T}_A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 125,65 \end{bmatrix} \text{ MPa};$$

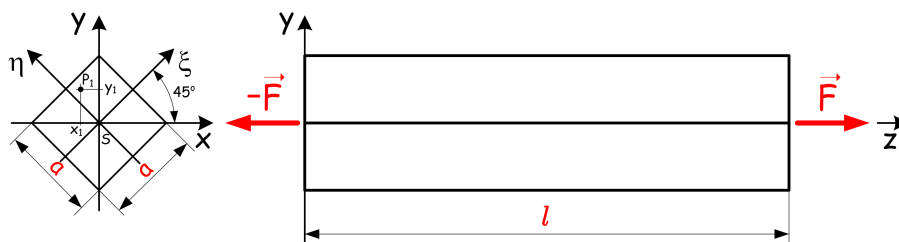
$$\vec{p}_n = (-108,816 \vec{e}_z) \text{ MPa};$$

$$\sigma_n = 94,24 \text{ MPa};$$

$$\vec{\tau}_n = (-47,12 \vec{e}_y - 27,195 \vec{e}_z) \text{ MPa};$$



- 24** A négyzet keresztmetszetű rúd ($a = 20 \text{ mm}$; $l = 200 \text{ mm}$) terhelése két véglapon, a súlypontba redukált \vec{F} és $-\vec{F}$ erőkkel adott, amelyek hatására $\Delta l = 20 \mu\text{m}$ hosszváltozást szenved el az $E = 200 \text{ GPa}$ és $\nu = 0,3$ anyagjellemzőkkel bíró rúd.



a. Állapítsa meg az igénybevételt és adja meg a vonatkozó igénybevételi ábrát!

b. Számítsa ki a $P_1(-3; 5; 0) \text{ mm}$ pontbeli ε_x , ε_y és ε_z fajlagos nyúlásokat és adja meg \underline{A}_{P_1} alakváltozási tenzor mátrixát xyz és $\xi\eta\zeta$ koordináta-rendszerekben!

c. Határozza meg P_1 pontban a \underline{T}_{P_1} feszültségi tenzor mátrixát xyz és $\xi\eta\zeta$ koordináta-rendszerekben és ábrázolja az x és y koordinátatengelyek menti feszültségeloszlásokat jelleghelyesen!

d. Határozza meg azt az N rúderőt, amely $\Delta a = -4,5 \mu\text{m}$ méretváltozást okoz a rúdon!

e. Megfelel-e szilárdságtani szempontból a rúd, ha a (c.) és (d.) pontokban megállapított terheléseket feszültségcsúcsra ellenőrizzük rúdanyagra vett $\sigma_{jell} = 100 \text{ MPa}$ és $n = 2$ mellett!

f. Méretezze a rudat $N = 150 \text{ kN}$ terhelésre, ha a megengedett feszültség $\sigma_{meg} = 60 \text{ MPa}$ értékű!

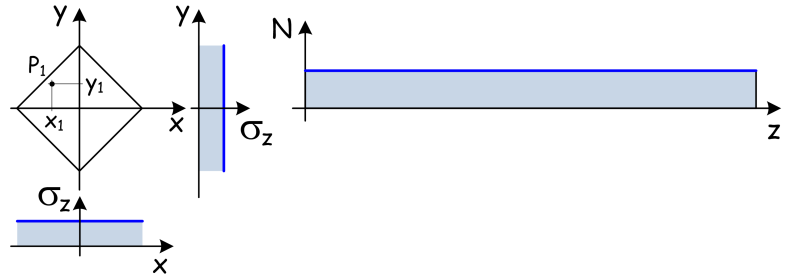
Megoldás:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -3 \cdot 10^{-5}; \varepsilon_z = 10^{-4};$$

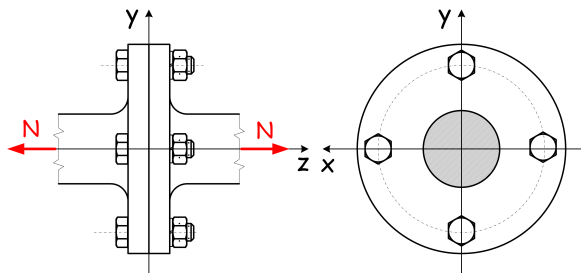
$$\begin{bmatrix} \underline{A}_{P_1} \\ (x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_{P_1} \\ (\xi,\eta,\zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5};$$

$$\begin{bmatrix} \underline{T}_{P_1} \\ (x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{T}_{P_1} \\ (\xi,\eta,\zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \text{ MPa};$$

$$N = 60 \text{ kN}; \text{ igen, nem, } a = 50 \text{ mm}$$



25 Az $N = 80 \text{ kN}$ rúderővel terhelt rúdcsatlakozást $k = 4$ darab csavarral valósítjuk meg. A szereléskor ébredő feszültségeket elhanyagolva határozzuk meg az egyes csavarok magkeresztmetszetének $A_{szüks}$ méretét, ha a csavaranyagra a $\sigma_{meg} = 100 \text{ MPa}$ előírást tették!

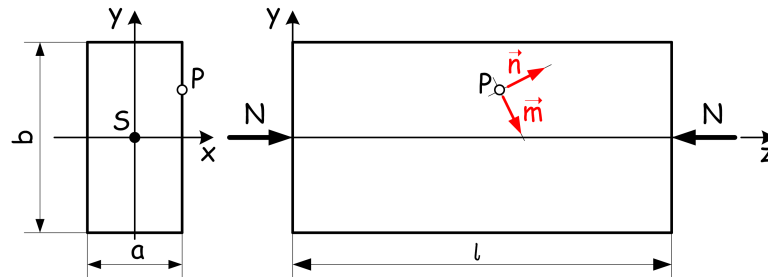


Megoldás: $A_{szüks} = 200 \text{ mm}^2$

26 Mekkora N erővel terhelhető a $k = 114$ darab egyenként $d = 1 \text{ mm}$ átmérőjű elemi szálból álló acélsodrony kötél, ha a benne $\sigma_{kötél} = 300 \text{ MPa}$ feszültség ébred?

Megoldás: $N = 26861 \text{ N}$

27 A téglalap keresztmetszetű rúd ($a = 20 \text{ mm}$; $b = 40 \text{ mm}$; $l = 100 \text{ mm}$) N rúderők által nyomásnak kitett és $E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0,25$ anyagjellemzőkkel rendelkezik.



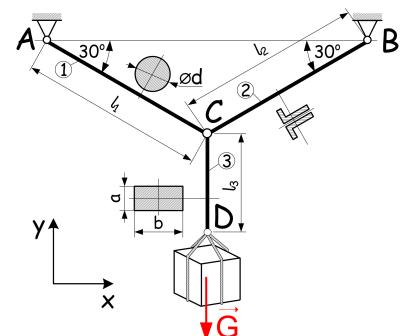
a. Mekkora N mellett alakul ki a P pontban az $\vec{n} = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_y + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_z$ és $\vec{m} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_y + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_z$ egységvektorokkal kijelölt egyenesek egymással bezárt derékszögének ($\frac{\pi}{2}$) terhelés hatására bekövetkező $\gamma_{mn} = -2,5 \cdot 10^{-4}$ mértékű szögtorzulása?

b. Határozza meg a fellépő N mellett a rúd Δl megnyúlását és a rúdban felhalmozódó U alakváltozási energiát!

Megoldás: $N = -40 \text{ kN}$; $\Delta l = -25 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$; $U = 0,5 \text{ J}$

28 Az ábrán látható egy $G = 150 \text{ kN}$ súlyt tartó három különböző keresztmetszettel bíró, de azonos ($E = 200 \text{ GPa}$, $\nu = 0,25$) anyagból készített és $l_1 = l_2 = 3 \text{ m}$ és $l_3 = 2 \text{ m}$ hosszúságú rudakból összeépített szerkezet.

a. Ellenőrizze az 1 jelű $d = 40 \text{ mm}$ átmérőjű körkereszt-



metszetű rudat feszültségcsúcsra, ha $\sigma_{jell} = 240$ MPa és $n = 2$!

b. Méretezze a 3 jelű rudat, ha a téglalap keresztmetszet oldalainak aránya $b = 2a$ ismert és $\sigma_{jell} = 240$ MPa és $n = 2$!

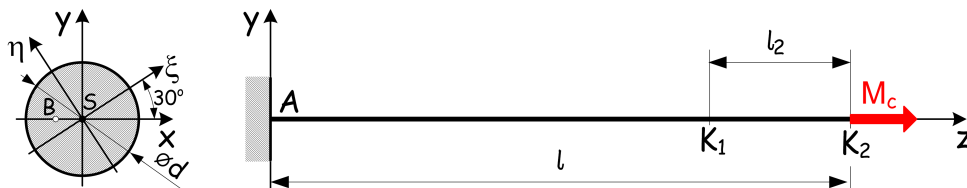
c. Határozza meg a 2 jelű két azonos L szelvényből álló keresztmetszet esetén azt az $A_{szüks}$ területet $\sigma_{jell} = 240$ MPa és $n = 2$ mellett, amely alapján szabványos szelvényt választhatunk!

d. Számítsa ki az egyes rudakban felhalmozódó alakváltozási energiák értékét!

Megoldás: $\sigma_{max} = 119,37$ MPa $<$ $\sigma_{meg} = 120$ MPa \implies megfelel!; $b = 2a \geq 50$ mm; $A_{szüks} = 1250$ mm²;

$U_1 = 134,28$ J; $U_2 = 133,9$ J; $U_3 = 90$ J

29 A körkeresztmetszetű $d = 20$ mm átmérőjű és $l = 500$ mm hosszúságú rudat (tengelyt) $M_c = 40$ Nm nagyságú csavarónyomaték veszi igénybe az ábrán látható módon K_2 keresztmetszetben. A tengely anyagát $G = 76923$ MPa modulus jellemzi.



a. Szemléltesse az x , y és ξ koordinátatengelyek menti feszültségeloszlásokat jelleghelyesen a K_1 keresztmetszetben, amely $l_2 = 160$ mm távolságra esik K_2 tengelyvégtől!

b. Adja meg a K_1 keresztmetszet $B(-5; 0)$ mm pontjában ébredő \underline{T}_B feszültségi tenzor mátrixát xyz és $r\varphi z$ koordináta-rendszerekben és szemléltesse is elemi kockákon!

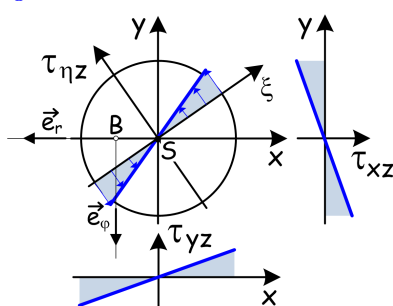
c. Adja meg a K_1 keresztmetszet $B(-5; 0)$ mm pontjában az \underline{A}_B alakváltozási tenzor mátrixát xyz és $r\varphi z$ koordináta-rendszerekben és szemléltesse azokat elemi triédereken!

d. Számítsa ki a K_2 keresztmetszet K_1 keresztmetszethez viszonyított Φ_{12} szögelfordulását!

e. Határozza meg a tengelyt érő igénybevétel hatására megjelenő U alakváltozási energiát!

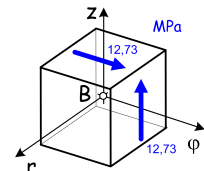
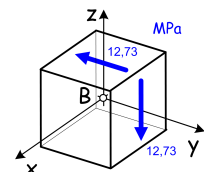
f. Mekkora a $d_{szüks}$ átmérője a tengelynek, ha anyagára megengedett feszültség $\tau_{meg} = 80$ MPa értékű?

Megoldás:

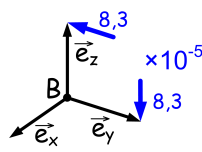


$$\underline{T}_B(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12,73 \\ 0 & -12,73 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa};$$

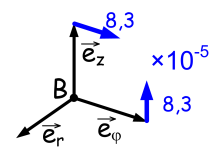
$$\underline{T}_B(r,\varphi,z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12,73 \\ 0 & 12,73 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa};$$



$$\underline{A}_B(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8,3 \\ 0 & -8,3 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-5};$$

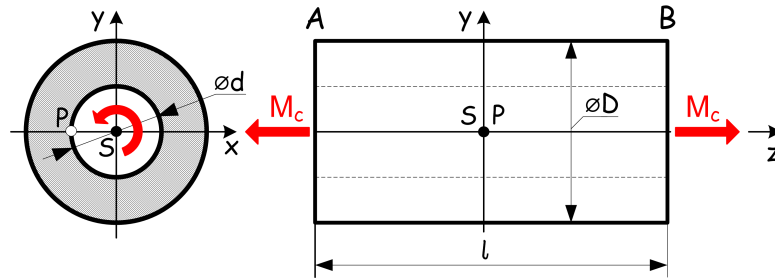


$$\underline{A}_B(r,\varphi,z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8,3 \\ 0 & 8,3 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-5};$$



$$\Phi_{12} = 5,3 \cdot 10^{-3} \text{ rad}; U = 0,331 \text{ J}; d_{szüks} = 13,65 \text{ mm}$$

- 30** A $D = 70 \text{ mm}$ külső és $d = 50 \text{ mm}$ belső átmérőjű körgyűrű keresztmetszetű rúd $l = 1,2 \text{ m}$ hosszúságú szakaszának igénybevétele ábrán látható módon $M_c = 5 \text{ kNm}$ nagyságú csavarás.



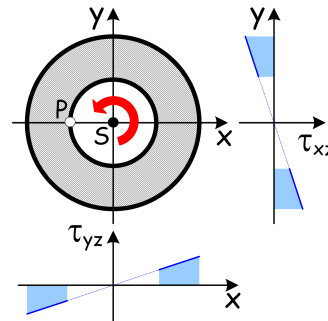
- a. Rajzolja meg jelleghelyesen a $z = 0$ koordinátájú keresztmetszeten az x és y tengelyek menti feszültségeloszlást és határozza meg ezek alapján a keresztmetszet veszélyes pontját!
- b. Határozza meg a keresztmetszet $P(-25; 0; 0) \text{ mm}$ pontjában a \underline{T}_P feszültségi és \underline{A}_P alakváltozási tenzor mátrixát, ha $G = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$!

Megoldás:

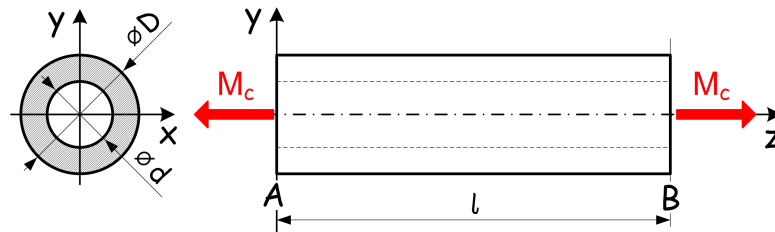
$$\underline{T}_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -71,7 \\ 0 & -71,7 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa};$$

$$\underline{A}_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4,48 \\ 0 & -4,48 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-4};$$

Veszélyes pontok: $\frac{D}{2}$ kerületi pontok!



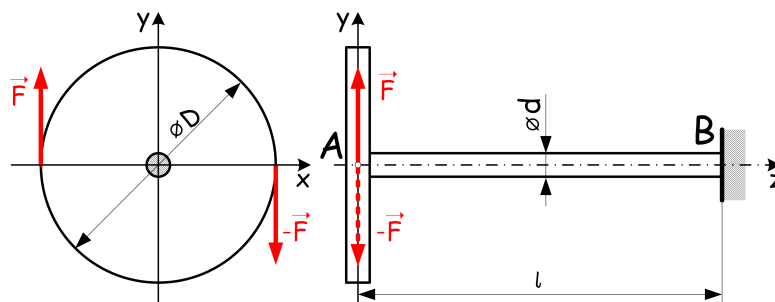
- 31** Az l hosszúságú, $M_c = 2 \text{ kNm}$ csavarónyomatékkal terhelt, körgyűrű keresztmetszetű rúd (csőtengely) esetén az átmérők aránya $D = 2d$ ismert.



- a. Méretezze a rudat feszültségcsúcsra $\tau_{meg} = 60 \text{ MPa}$ rúdanyagra megengedett feszültség esetén!
- b. Mekkora lehet a rúd maximális l_{max} hossza, ha a két szélő (A és B) keresztmetszet egymáshoz viszonyított szögelfordulásának megengedett értéke $\Phi_{meg} = 4 \cdot 10^{-3}$ adott és $G = 80 \text{ GPa}$?

Megoldás: $d \geq 28,29 \text{ mm}$; $l_{max} = 150,75 \text{ mm}$ ($d = 28,29 \text{ mm}$)

- 32** A $d = 60 \text{ mm}$ átmérőjű és $l = 1,2 \text{ m}$ hosszúságúnak tekintett tengelyhez (rúdhoz) mereven kapcsolódó $D = 0,4 \text{ m}$ átmérőjű tárcsa kerületén állandó $F = 5 \text{ kN}$ nagyságú erőből álló erőpár működik az ábrán látható módon.



- a. Állapítsa meg a tengely igénybevételét, adja meg a vonatkozó igénybevételi ábrát és keresse meg a veszélyes keresztmetszetet és azon a veszélyes pontot!
- b. Ellenőrizze a tengelyt feszültségcsúcsra, ha a tengely anyagára megengedett nyírófeszültség $\tau_{meg} = 60 \text{ MPa}$ értékű!

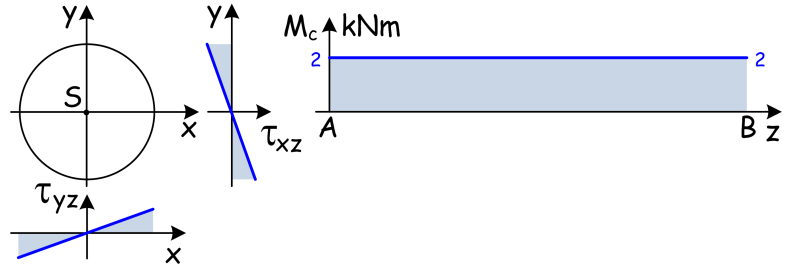
Megoldás:

Tiszta csavarás

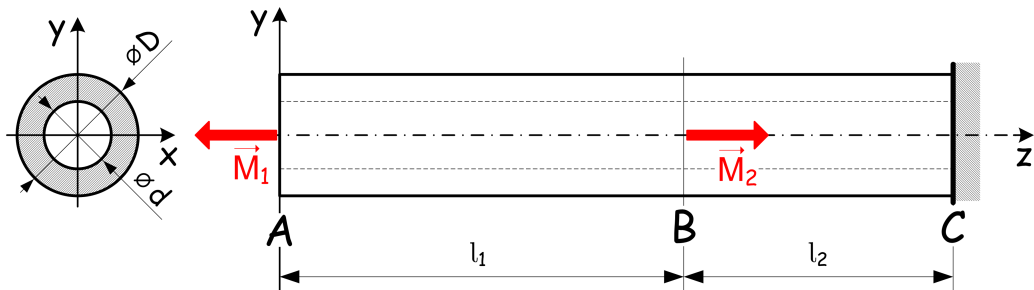
VKM: \overline{AB} ;

VP: kerületi pontok;

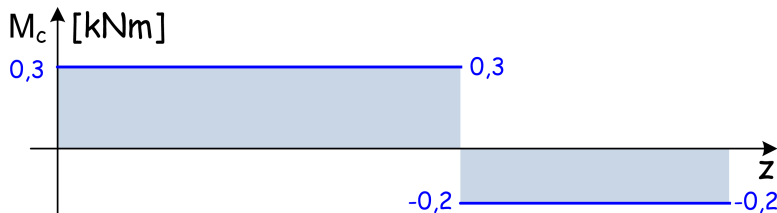
$$\tau_{max} = 47,16 \text{ MPa} < \tau_{meg} = 60 \text{ MPa} \Rightarrow \text{megfelel!}$$



- 33 Az ábrán vázolt körgyűrű keresztmetszetű, jobb végén befalazott rudat az $|\vec{M}_1| = 0,3 \text{ kNm}$ és az $|\vec{M}_2| = 0,5 \text{ kNm}$ nyomatékok csavarásra terhelik (az A, ill. B keresztmetszetekben). $l_1 = 600 \text{ mm}$, $l_2 = 400 \text{ mm}$.



- a. Az igénybevételi ábra megrajzolása után méretezzük a csőtengelyt, ha ismeretes a $D/d = 3/2$ átmérőviszony és a megengedett $\tau_{meg} = 70 \text{ MPa}$ feszültség a tengely anyagára!
- b. Határozza meg a B keresztmetszet A keresztmetszethez viszonyított Φ_{AB} szögelfordulását $G = 8 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ nyírási rugalmassági modulus mellett!

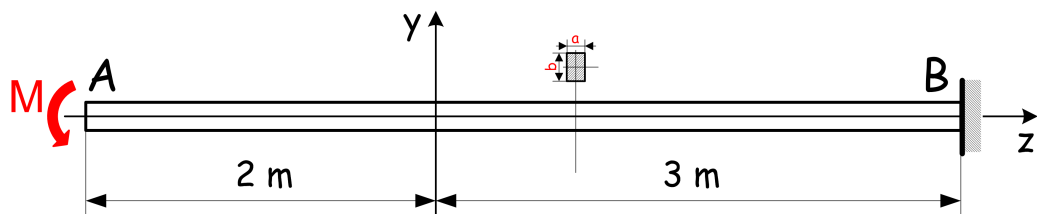


Megoldás:

$$d \geq 20 \text{ mm}; D \geq 30 \text{ mm}$$

$$\Phi_{AB} = 0,035 \text{ rad} (d = 20 \text{ mm})$$

- 34 Az ábrán látható módon az A keresztmetszetben egy $M = 80 \text{ Nm}$ nagyságú nyomaték terheli a befalazott téglalap ($a = 10 \text{ mm}$, $b = 20 \text{ mm}$) keresztmetszetű rudat.



- a. Állapítsa meg az igénybevételt, rajzolja meg a vonatkozó igénybevételi ábrát és a $z = 0$ keresztmetszetben az x és y koordinátatengelyek mentén ébredő feszültségeloszlást jelleghelyesen!

- b. Határozza meg a keresztmetszet veszélyes pontjait és ellenőrizze a rudat feszültségcsúcsra, ha anyagára megengedett feszültség értéke $\sigma_{meg} = 180 \text{ MPa}$!
- c. Határozza meg a $P(0; 5; 0) \text{ mm}$ pontban a $\underline{\underline{T}}_P$ feszültségi tenzor mátrixát és szemléltesse azt a P pont környezetéből kivett elemi kockán!
- d. Határozza meg az $\underline{\underline{A}}_P$ alakváltozási tenzor mátrixát és szemléltesse azt a P ponthoz kötött elemi triéderen, ha $E = 200 \text{ GPa}$ és $\nu = 0,25$!
- e. Számítsa ki a rúdban felhalmozódó alakváltozási energia értékét!

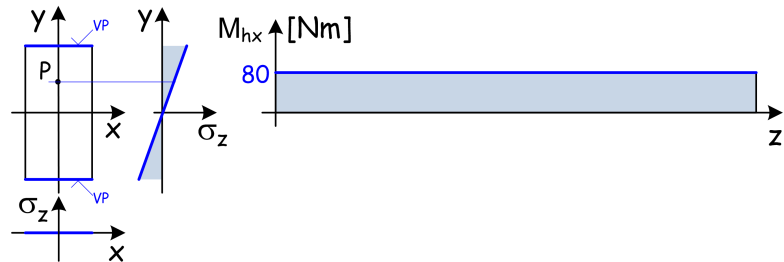
Megoldás:

$$\sigma_z(y) = 12y; \quad \sigma_z(P) = 60 \text{ MPa};$$

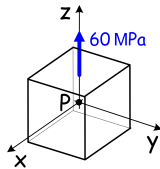
$$VP: y = \pm \frac{b}{2} = \pm 10 \text{ mm}$$

$$\sigma_{max} = 120 \text{ MPa} < \sigma_{meg} = 180 \text{ MPa} \\ \Rightarrow \text{megfelel!}$$

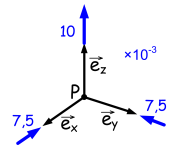
$$U = 12 \text{ J}$$



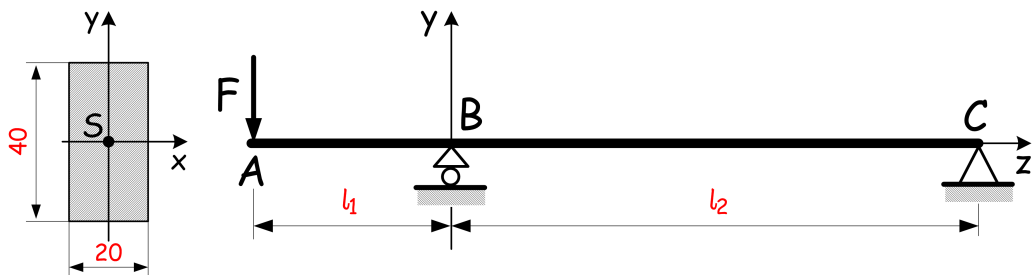
$$\underline{\underline{T}}_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{bmatrix} \text{ MPa};$$



$$\underline{\underline{A}}_P = \begin{bmatrix} -7,5 & 0 & 0 \\ 0 & -7,5 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5};$$



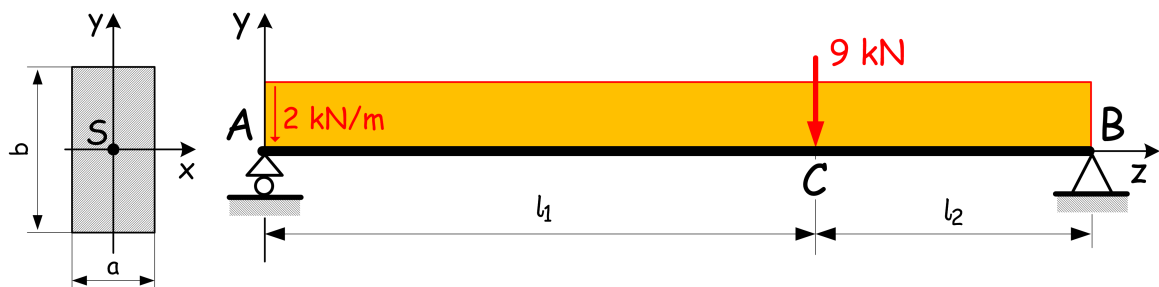
- 35] Az ismert téglalap keresztmetszettel bíró konzolos tartón ($l_1 = 1,5 \text{ m}$, $l_2 = 4 \text{ m}$) egy F erő jelenti az ábrán látható módon a terhelést.



- a. Határozza meg, hogy mekkora F_{max} erővel terhelhető a konzol, ha $\sigma_{meg} = 150 \text{ MPa}$!
- b. Mekkora lesz az F'_{max} maximális erőterhelés, ha a keresztmetszetet z körül 90° -kal elforgatjuk?

Megoldás: $F_{max} = 533,3 \text{ N}$; $F'_{max} = 266,6 \text{ N}$

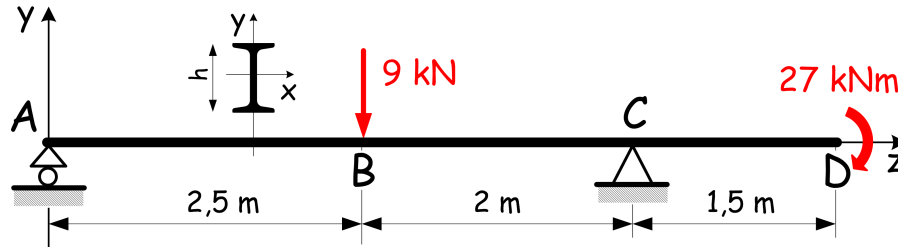
- 36] Adott a téglalap keresztmetszetű kéttámaszú tartó ($l_1 = 4 \text{ m}$, $l_2 = 2 \text{ m}$) az ábrán látható módon terhelve.



- a. Méretezzen feszültségcsúcsra, ha $b = 2a$ és a tartó anyagára $\sigma_{jell} = 330 \text{ MPa}$ és $n = 2$ adott!
 b. Méretezze a tartót feszültségcsúcsra d átmérőjű körkeresztmetszet esetében, ha a tartó anyagára $\sigma_{jell} = 330 \text{ MPa}$ és $n = 2$ adott!

Megoldás: VKM: C ; $M_{hxmax} = |M_{hx}(C)| = 20 \text{ kNm}$; $a \geq 56,65 \text{ mm}$; $d \geq 107,28 \text{ mm}$

- 37** Ismert a prizmatikus tartó terhelése és anyagára tett $\sigma_{meg} = 165 \text{ MPa}$ előírás.



Méretezze a tartót feszültségcsúcsra, azaz válasszon keresztmetszetet a mellékelt táblázatból!

Megoldás:

VKM: \overline{CD}

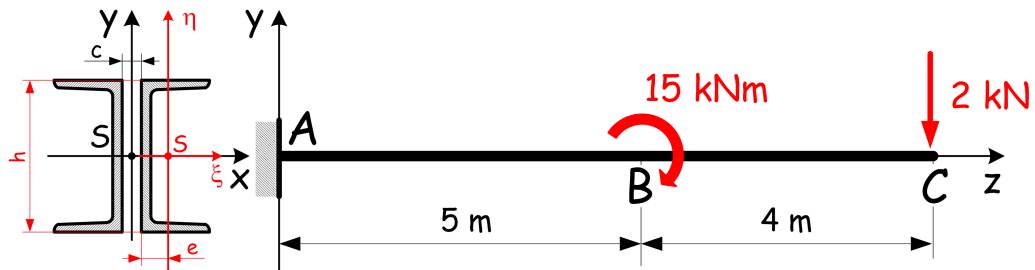
$M_{hxmax} = M_{hx}(C) = M_{hx}(D) = 27 \text{ kNm}$

$K_x \geq 163,6 \text{ cm}^3$

Választott KM: I 200

szelvény	h [mm]	K_x [cm ³]	K_y [cm ³]	A [cm ²]
I 160	160	23,8	5,48	7,49
I 180	180	161	19,8	27,9
I 200	200	214	26,0	33,4
I 220	220	278	33,1	39,5
I 240	240	354	41,7	46,1

- 38** Ismert a prizmatikus tartó terhelése és anyagára tett $\sigma_{meg} = 165 \text{ MPa}$ előírás. Vegye figyelembe, hogy a tartó keresztmetszetét két darab U szelvény alkotja az ábrán látható elrendezésben!



- a. Méretezze a tartót feszültségcsúcsra, azaz válasszon keresztmetszetet a mellékelt táblázatból!

szelvény	h [mm]	I_ξ [cm ⁴]	K_ξ [cm ³]	I_η [cm ⁴]	K_η [cm ³]	A [cm ²]	e [cm]
U 120	120	364	60,7	43,2	11,1	17,0	1,60
U 140	140	605	86,4	62,7	14,8	20,4	1,75
U 160	160	925	116	85,3	18,3	24,0	1,84
U 180	180	1350	150	114	22,4	28,0	1,92
U 200	200	1910	191	148	27,0	32,2	2,01
U 220	220	2690	245	197	33,6	37,4	2,14

- b. Befolyásolja-e a méretezést a két U szelvény között kialakított $c = 10 \text{ mm}$ méretű hézag? Az U gerendák egymással történő szembefordítása jelent-e változást?

Megoldás: VKM: A $M_{hxmax} = M_{hx}(A) = 33 \text{ kNm}$; $K_x \geq 200 \text{ cm}^3$; Választott KM: U 160; Nem. Nem.

39) Az ábrán adott síkidom méretei ismertek.

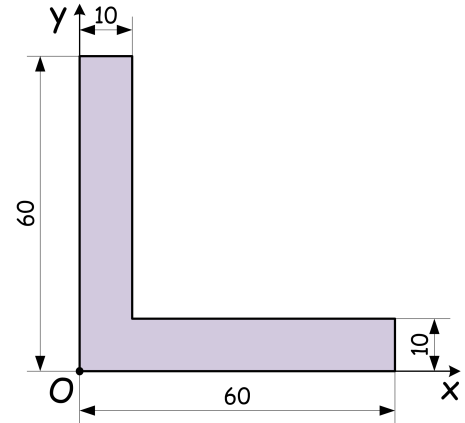
- Keresse meg a síkidom S jelű súlypontját!
- Határozza meg a síkidom S súlypontjában az \underline{I}_S tehetetlenségi tenzor mátrixát!
- Számítsa ki a szelvény fő tehetetlenségi nyomatékait és a hozzájuk tartozó tehetetlenségi főirányokat!

Megoldás:

$$x_S = 18,63 \text{ mm}; y_S = 18,63 \text{ mm};$$

$$\underline{I}_S = \begin{bmatrix} 354,62 & 204,54 \\ 204,54 & 354,62 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \text{ mm}^4; I_1 = 559,16 \cdot 10^3 \text{ mm}^4; I_2 = 150,08 \cdot 10^3 \text{ mm}^4;$$

$$\underline{I}_S = \begin{bmatrix} 559,16 & 0 \\ 0 & 150,08 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \text{ mm}^4; \vec{n}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y; \vec{n}_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_y$$



40) Az ábrán látható módon az A keresztmetszetben egy $M = 5 \text{ kNm}$ nagyságú nyomaték terheli a T szelvényű ($a = 30 \text{ mm}$, $b = 90 \text{ mm}$, $c = 120 \text{ mm}$), alumíniumból ($E = 70 \cdot 10^3 \text{ MPa}$) készített, befalazott, $l = 1,8 \text{ m}$ hosszúságú prizmatikus rudat. (A szelvény súlypontja $e = 79,286 \text{ mm}$ ismert!)



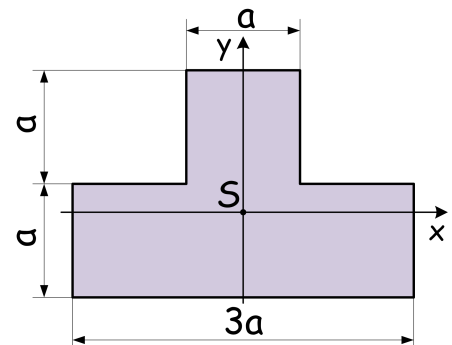
- Határozza meg a szelvényben ébredő legnagyobb $\sigma_{\text{húzó}}^{\text{max}}$ húzó és $\sigma_{\text{nyomó}}^{\text{max}}$ nyomófeszültséget!
- Számítsa ki a rúd ρ görbületi sugarát és a benne felhalmozódó U alakváltozási energiát!

Megoldás: $\sigma_{\text{húzó}}^{\text{max}} = 51,84 \text{ MPa}$; $\sigma_{\text{nyomó}}^{\text{max}} = 26,62 \text{ MPa}$; $\rho = 107,058 \text{ m}$; $U = 42,03 \text{ J}$

41) A vázolt keresztmetszet méreteit az a függvényében állapítjuk meg.

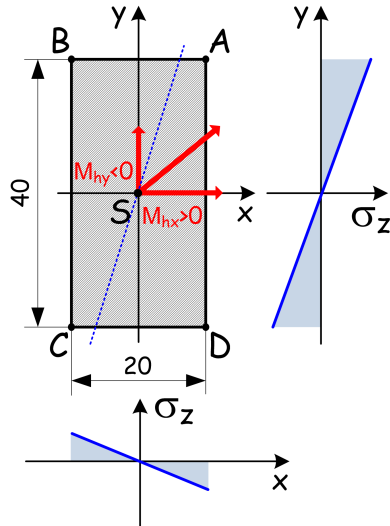
- Válasszuk meg a méretet úgy, hogy az x tengelyre számított másodrendű nyomatéka a keresztmetszetnek $I_x = 2601,4 \text{ cm}^4$ legyen!

Megoldás: $a = 7 \text{ cm}$;



42) Egy téglalap keresztmetszetű ($a = 20 \text{ mm}$, $b = 40 \text{ mm}$) prizmatikus rúd veszélyes K keresztmetszetének igénybevétele az S súlypontba redukált $\vec{F} = \vec{0}$, $\vec{M}_S = (150\vec{e}_x + 120\vec{e}_y) \text{ Nm}$ eredő vektorkettőssel adott.

- Állapítsa meg az igénybevételt és rajzolja meg a keresztmetszet x és y súlyponti szimmetriatengelyei mentén ébredő feszültségeloszlást jelleghelyesen!



b. Határozza meg az A pontban a \underline{T}_A feszültségi tenzor mátrixát és szemléltesse azt az A pont környezetéből kivett elemi kockán!

c. Írja fel a zérusvonal egyenletét, továbbá adja meg a zérusvonal x tengellyel bezárt φ szögét!

d. Adja meg a keresztmetszet veszélyes pontjait és számítsa ki a σ_{zmax} feszültségértéket!

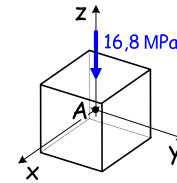
Megoldás: $[\underline{T}_A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16,8 \end{bmatrix}$ MPa;

$\sigma_z(x, y) = -4,5x + 1,41y$;

$\sigma_z(A) = -16,8$ MPa;

$y = 3,2x$; VP: B és D

$\sigma_{zmax} = 73,2$ MPa



43 A szabványos L80.80.10 keresztmetszetű tartó K keresztmetszetét $\vec{M} = (0,35\vec{e}_x)$ kNm nyomaték terheli. $h = 80$ mm, $a = 10$ mm, $e = 23,4$ mm, $u_1 = 33,1$ mm, $u_2 = 28,5$ mm, $w = 56,6$ mm, $I_\xi = 139 \cdot 10^4$ mm⁴, $I_\eta = 35,9 \cdot 10^4$ mm⁴.

a. Határozza meg a keresztmetszet Q pontjában ébredő $\sigma_z(Q)$ feszültséget!

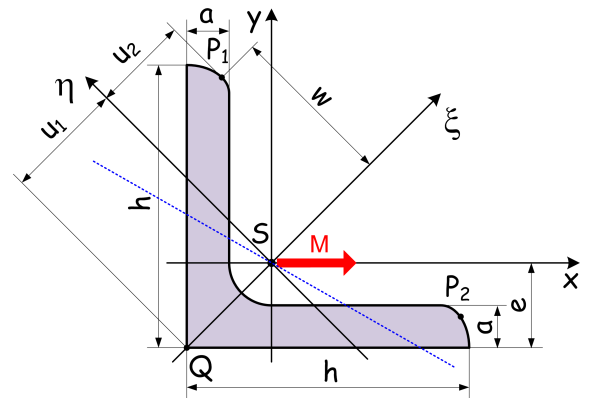
b. Írja fel főtengelyek koordináta-rendszerében a zérusvonal egyenletét!!

c. Számítsa ki a σ_{zmax} értékét!

Megoldás:

$M_{h\xi} = M_{h\eta} = 247,49$ Nm; $\sigma_z(Q) = -22,81$ MPa;

$\eta = -3,87\xi$; $\sigma_{zmax} = \sigma_z(P_1) = 29,71$ MPa



44 Egy szilárd test P pontjában az xyz tengelyekre merőleges elemi síkokon a $\vec{p}_x = (64\vec{e}_x - 32\vec{e}_y)$ MPa, $\vec{p}_y = (-32\vec{e}_x + 80\vec{e}_y)$ MPa és $\vec{p}_z = (16\vec{e}_z)$ MPa feszültségvektorok adóttak.

a. Határozza meg a P pontban a \underline{T}_P feszültségi tenzor mátrixát és szemléltesse azt a P pont környezetéből kivett elemi kockán!

b. Ábrázolja a P pontbeli feszültségi állapotot Mohr-féle feszültségi kördiagramon!

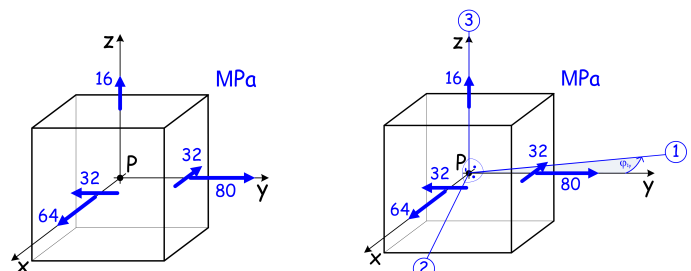
c. Olvassa le a Mohr diagramról a P pontban ébredő maximális nyírófeszültség értékét!

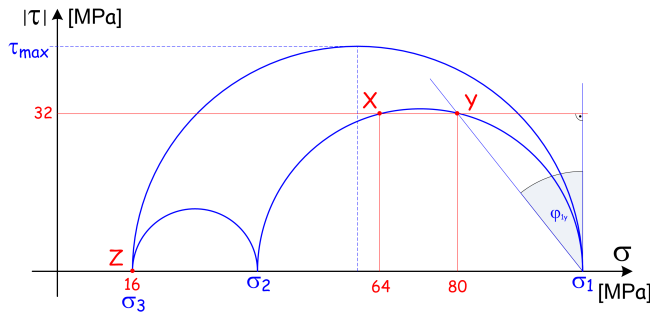
d. Határozza meg a főfeszültségeket! Írja fel a P pontban a \underline{T}_P feszültségi tenzor mátrixát a főirányok koordináta-rendszerében, amelyeket szemléltessen is!

e. Hasonlítsa össze a Mohr és a HMH-elmélet alapján számított σ_{red} redukált feszültségeket!

Megoldás:

$[\underline{T}_P] = \begin{bmatrix} 64 & -32 & 0 \\ -32 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$ MPa;





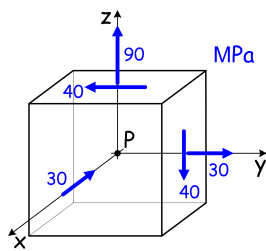
$$\begin{bmatrix} \underline{T}_P \\ (\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 104,98 & 0 & 0 \\ 0 & 39,02 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \text{ MPa};$$

$$\tan \varphi_{1y} = \frac{24,98}{32} = 0,780625 \Rightarrow \varphi_{1y} = 37,98^\circ$$

$$\tau_{max} = 44,49 \text{ MPa};$$

$$\sigma_{red}^{Mohr} = 89 \text{ MPa}; \sigma_{red}^{HMH} = 80,01 \text{ MPa}$$

45 Az alakváltozást szenvedett szilárd test P pontjában kialakult feszültségi állapot elemi kockán adott.



a. Írja fel a P pontban a \underline{T}_P feszültségi tenzor mátrixát xyz koordináta-rendszerben!

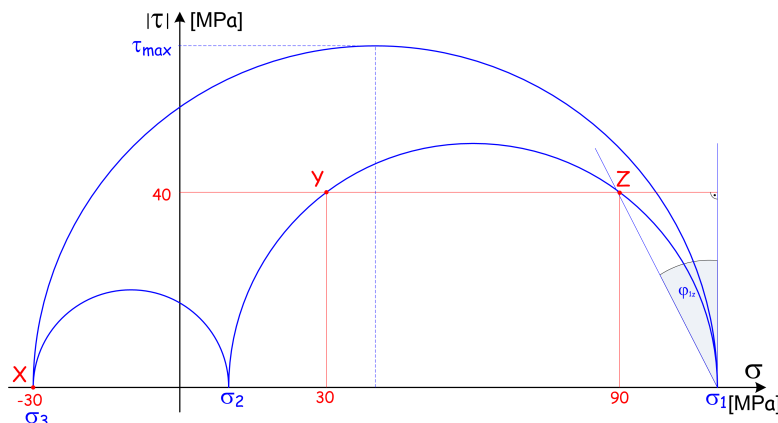
b. Ábrázolja a P pontbeli feszültségi állapotot Mohr-féle feszültségi kördiagramon!

c. Olvassa le a Mohr diagramról a P pontban ébredő maximális nyíró-feszültség értékét!

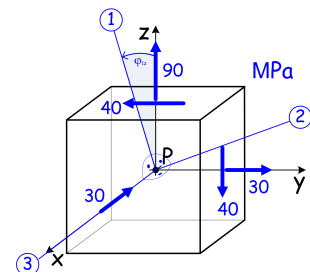
d. Határozza meg a Mohr diagram segítségével a főfeszültségeket és a hozzájuk tartozó főtengeleket!

e. Hasonlítsa össze a Mohr és a HMH-elmélet alapján számított σ_{red} redukált feszültségeket!

Megoldás:



$$\begin{bmatrix} \underline{T}_P \\ (x,y,z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & -40 \\ 0 & -40 & 90 \end{bmatrix} \text{ MPa};$$



$$\sigma_1 = 110 \text{ MPa}; \sigma_2 = 10 \text{ MPa}; \sigma_3 = -30 \text{ MPa}; \tan \varphi_{1z} = \frac{20}{40} = 0,5 \Rightarrow \varphi_{1z} = 26,56^\circ;$$

$$\tau_{max} = 70 \text{ MPa}; \sigma_{red}^{Mohr} = 140 \text{ MPa}; \sigma_{red}^{HMH} = 124,9 \text{ MPa}$$

46 Ismert a szilárd test P pontjában a $\underline{T}_P = [(110\vec{e}_x + 30\vec{e}_y) \circ \vec{e}_x + (30\vec{e}_x + 30\vec{e}_y) \circ \vec{e}_y + (-20\vec{e}_z) \circ \vec{e}_z]$ MPa feszültségi tenzor diadikus alakban.

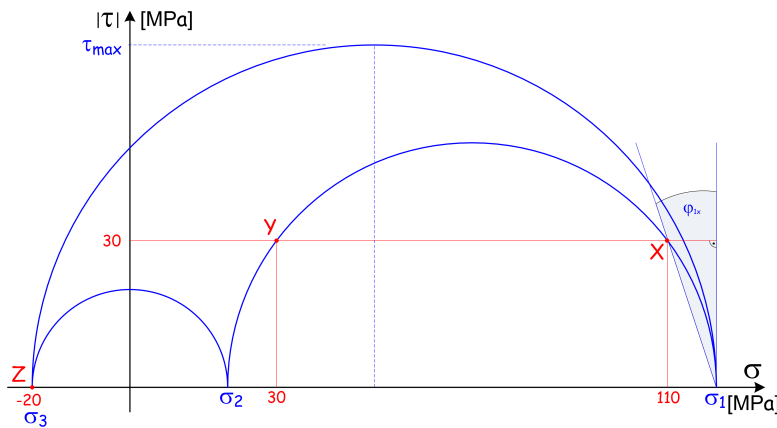
a. Írja fel a P pontban a \underline{T}_P feszültségi tenzor mátrixát xyz koordináta-rendszerben és szemléltesse elemi kockán!

b. Ábrázolja a P pontbeli feszültségi állapotot Mohr-féle feszültségi kördiagramon és olvassa le a főfeszültségeket!

c. Számítsa ki az 1-es főtengelel és az x tengely által bezárt φ_{1x} szög tangensét, és az elemi kockán is tüntesse fel a főirányokat!

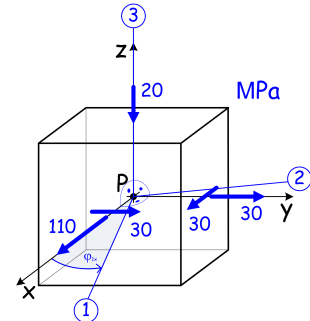
d. Olvassa le a Mohr diagramról a P pontban ébredő maximális nyírófeszültség értékét!

Megoldás:



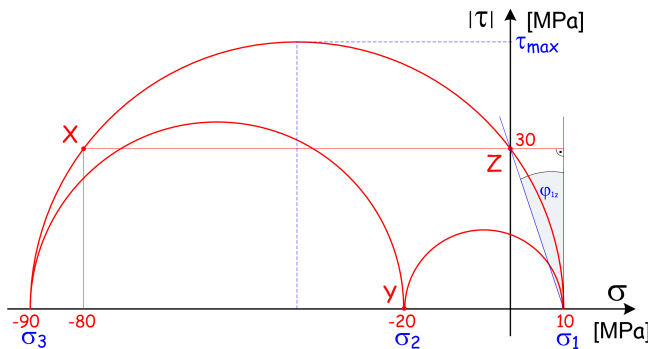
$$\underline{\underline{T}}_P = \begin{bmatrix} 110 & 30 & 0 \\ 30 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{bmatrix} \text{ MPa};$$

(x, y, z)



$$\sigma_1 = 120 \text{ MPa}; \sigma_2 = 20 \text{ MPa}; \sigma_3 = -20 \text{ MPa}; \tan \varphi_{1x} = \frac{10}{30} = 0,3 \implies \varphi_{1x} = 18,43^\circ; \tau_{max} = 70 \text{ MPa}$$

47] A szilárd test P jelű pontjában ébredő feszültségi állapot egy Mohr-féle kördiagramon adott.

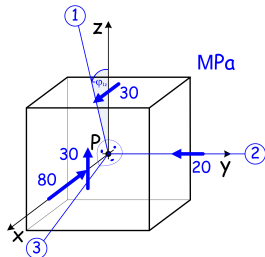


a. Határozza meg a P pontban a $\underline{\underline{T}}_P$ feszültségi tenzor mátrixát és szemléltesse elemi kockán, feltételezve, hogy a mátrixban szereplő valamennyi nyírófeszültség előjele pozitív!

b. Határozza meg a fő tengelyeket és szemléltesse azokat az elemi kockán!

c. Olvassa le a Mohr diagramról a P pontban ébredő maximális nyírófeszültség értékét!

Megoldás:



$$\underline{\underline{T}}_P = \begin{bmatrix} -80 & 0 & 30 \\ 0 & -20 & 0 \\ 30 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa};$$

(x, y, z)

$$\tan \varphi_{1z} = \frac{10}{30} = 0,3 \implies \varphi_{1z} = 18,43^\circ; \tau_{max} = 50 \text{ MPa}$$

48] Adott a szilárd test P pontjában a $\underline{\underline{T}}_P$ feszültségi tenzor xyz koordináta-rendszerbeli mátrixa:

$$\underline{\underline{T}}_P = \begin{bmatrix} 48 & 0 & -60 \\ 0 & 100 & 0 \\ -60 & 0 & -16 \end{bmatrix} \text{ MPa.}$$

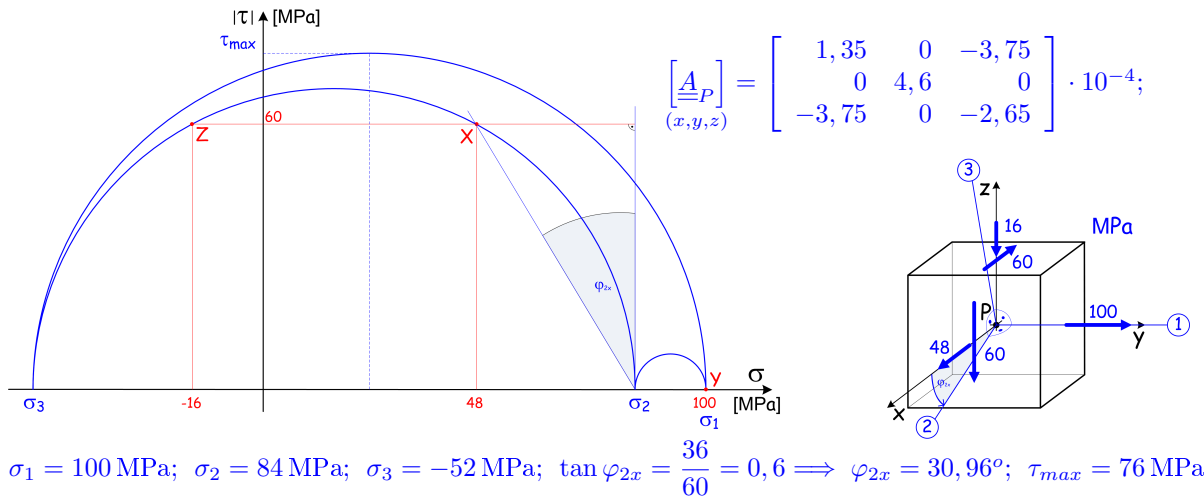
a. Rajzolja meg a P pontbeli feszültségi állapotot Mohr-féle feszültségi kördiagramon és olvassa le a főfeszültségeket!

b. Számítsa ki az 2-es fő tengely és az x tengely által bezárt φ_{2x} szög tangensét, és elemi kockán mutassa meg a főirányokat!

c. Olvassa le a Mohr diagramról a P pontban ébredő maximális nyírófeszültség értékét!

d. Határozza meg a P pontbeli $\underline{\underline{A}}_P$ alakváltozási tenzor xyz koordináta-rendszerbeli mátrixát, ha a rugalmas anyagot $G = 80 \text{ GPa}$ és $\nu = 0,25$ jellemzi!

Megoldás:

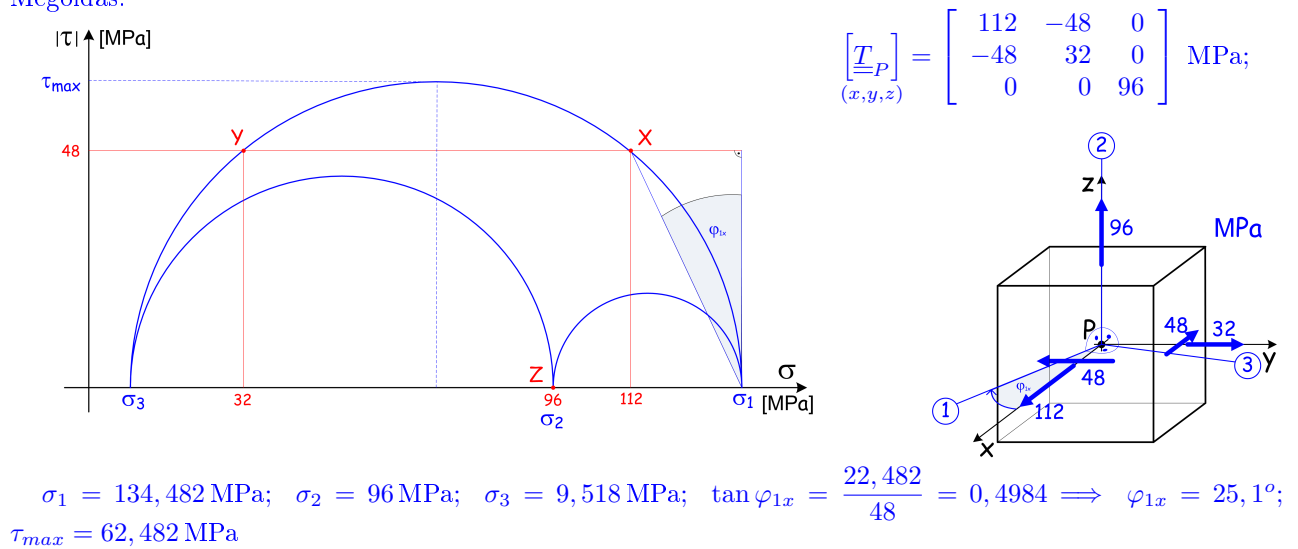


49 Adott a szilárd test P pontjában az \underline{A}_P alakváltozási tenzor xyz koordináta-rendszerbeli mátrixa:

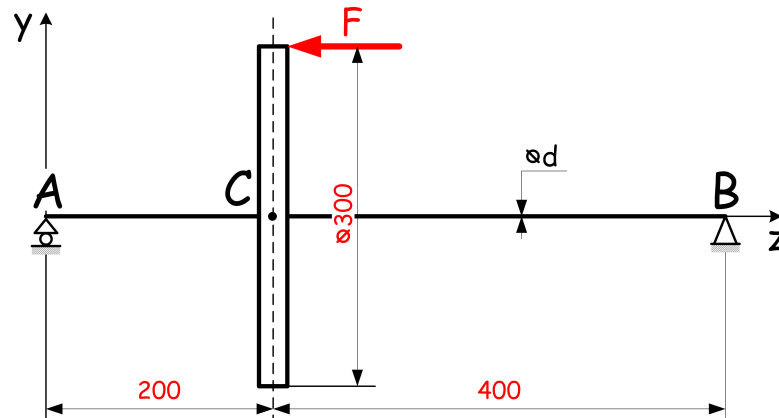
$$[\underline{A}_P] = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}.$$

- Határozza meg a P pontbeli \underline{T}_P feszültségi tenzor xyz koordináta-rendszerbeli mátrixát, ha a rugalmas anyag $G = 80 \text{ GPa}$ és $\nu = 0,25$ jellemzi!
- Rajzolja meg a P pontbeli feszültségi állapotot Mohr-féle feszültségi kördiagramon és olvassa le a főfeszültségeket!
- Olvassa le a Mohr diagramról a P pontban ébredő maximális nyírófeszültség értékét!

Megoldás:

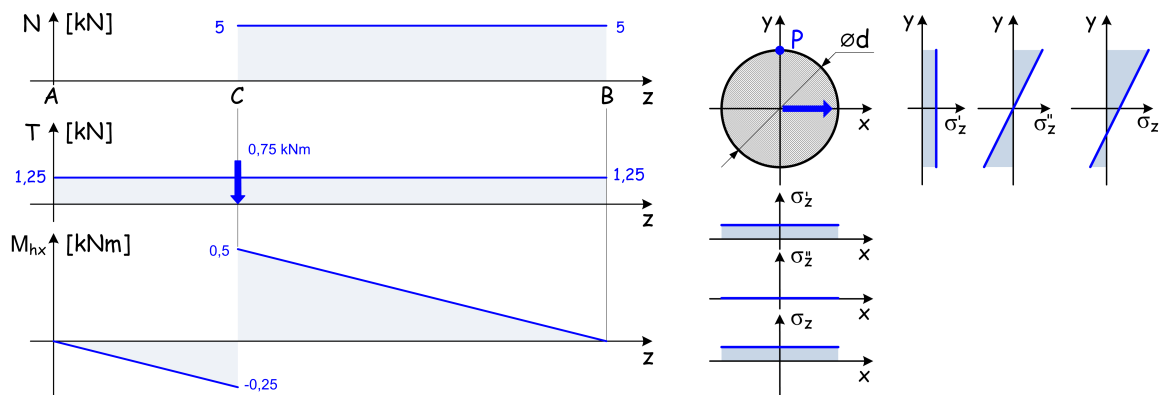


50 Egy kéttámaszú tartóként modellezett csapágyazott, körkeresztmetszetű tengelyre a hozzá mereven kapcsolódó tárcsa kerületén ható, z tengelyirányú $F = 5 \text{ kN}$ erő jelent terhelést.



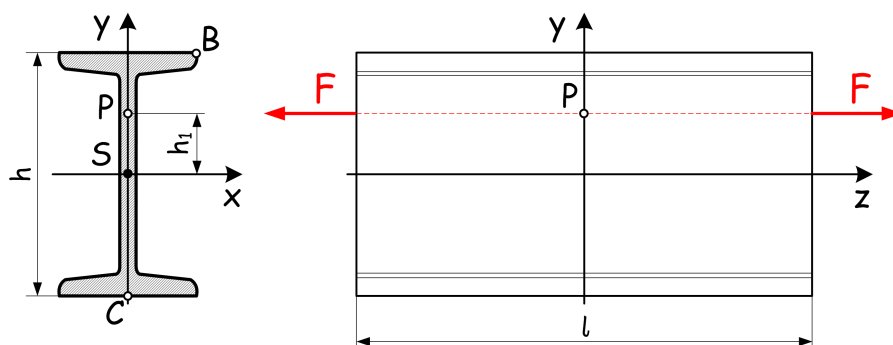
- Rajzolja meg a tengely igénybevételi ábráit, és azok alapján keresse meg a veszélyes keresztmetszetet!
- Rajzolja meg a feszültségeloszlást jelleghelyesen a veszélyes keresztmetszeten és állapítsa meg a veszélyes pontokat!
- Méretezze a tengelyt feszültségcsúcsra, ha anyagra megengedett feszültség $\sigma_{meg} = 130 \text{ MPa}$!
- Határozza meg tengelyben felhalmozódó U alakváltozási energia értékét ($E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$)!

Megoldás:



VKM: C^+ ; $N = 1,25 \text{ kN}$; $M_{hxmax} = M_{hx}(C^+) = 0,5 \text{ kNm}$; VP: P ; $d \geq 35 \text{ mm}$; $U = 1,299 \text{ J}$

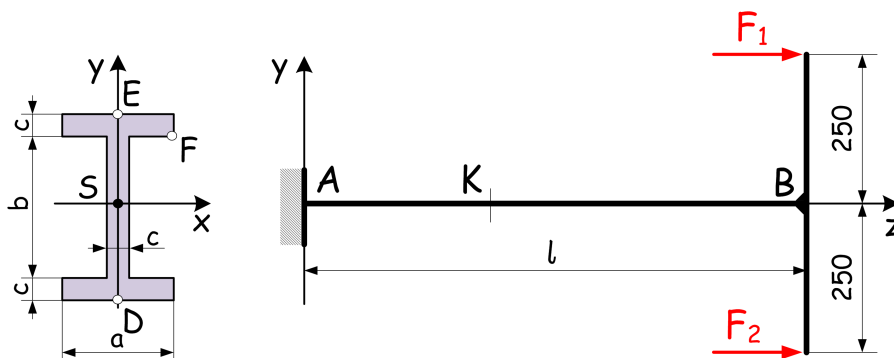
51 Az $l = 3 \text{ m}$ hosszúságú szabványos I240 ($h = 240 \text{ mm}$; $A = 46,1 \text{ cm}^2$; $I_x = 4,248 \cdot 10^3 \text{ cm}^4$) szelvényű rudat $F = 320 \text{ kN}$ nagyságú, z tengellyel párhuzamos, nem súlyponton áthaladó hatásvonalú ($h_1 = 60 \text{ mm}$) erők terhelik.



- Határozza meg a rúd igénybevételét!
- Határozza meg a rúd ($z = 0$) keresztmetszetében a $\sigma_z(y)$ normálfeszültség függvényt!
- Számítsa ki a rúd ($z = 0$) keresztmetszetének S , B és C pontjaiban ébredő σ_z feszültségeket!
- Határozza meg a zérusvonal egyenletét és állapítsa meg a keresztmetszet veszélyes pontját!

Megoldás: húzás + hajlítás; $\sigma_z(y) = 69,41 + 0,4519y$; $\sigma_z(S) = 69,41$ MPa; $\sigma_z(B) = 123,64$ MPa; $\sigma_z(C) = 15,17$ MPa; zérusvonal: $y = -153,59$ mm; VP: $y = 120$ mm

- 52** A tartó AB szakaszának keresztmetszete ($a = 60$ mm, $b = 80$ mm és $c = 20$ mm) adott, terhelését a merőlegesen felhegesztett laposvason támadó $F_1 = 80$ kN és $F_2 = 120$ kN erők jelentik.



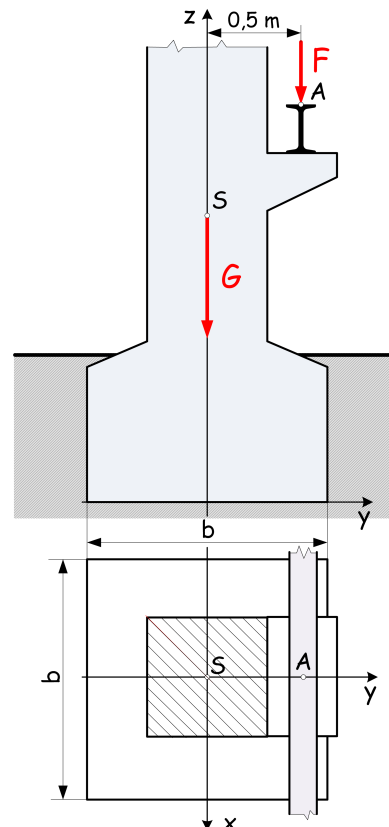
- Határozza meg a tartó K keresztmetszeténél a $\sigma_z(y)$ függvényt!
- Számítsa ki a tartó K keresztmetszetének S , D , E és F pontjaiban ébredő σ_z feszültségeket!
- Ellenőrizze AB szakaszt feszültségcsúcsra, ha $\sigma_{meg} = 100$ MPa!

Megoldás: $I_x = 6,93 \cdot 10^6$ mm⁴; $A = 4000$ mm²; $\sigma_z(y) = 50 - 1,4423y$;
 $\sigma_z(S) = 50$ MPa; $\sigma_z(E) = -36,54$ MPa; $\sigma_z(F) = -7,69$ MPa; $\sigma_z(D) = 136,54$ MPa;
 $\sigma_{max} = \sigma_z(D) = 136,54$ MPa $>$ σ_{meg} : Nem felel meg!

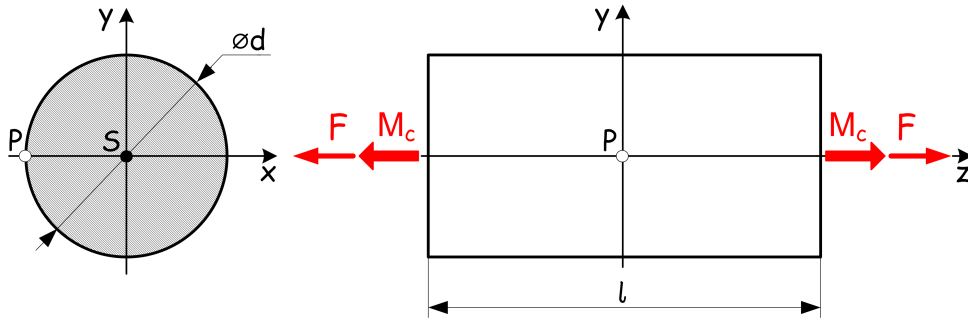
- 53** Az ábrán látható egy $G = 300$ kN önsúlyú betonoszlop, amelyre egy konzolra helyezett sínen (I gerendán) futó terhelést az A pontban koncentrált erőként, $F = 100$ kN nagyságban vesszük figyelembe. Az oszlop alapja egy $b \times b$ méretű négyzet.

- Mekkorára kell az oszlop betonlapjának b méretét tervezni, hogy a betonlapon húzófeszültség ne ébredjen?

Megoldás: $b \geq 0,75$ m

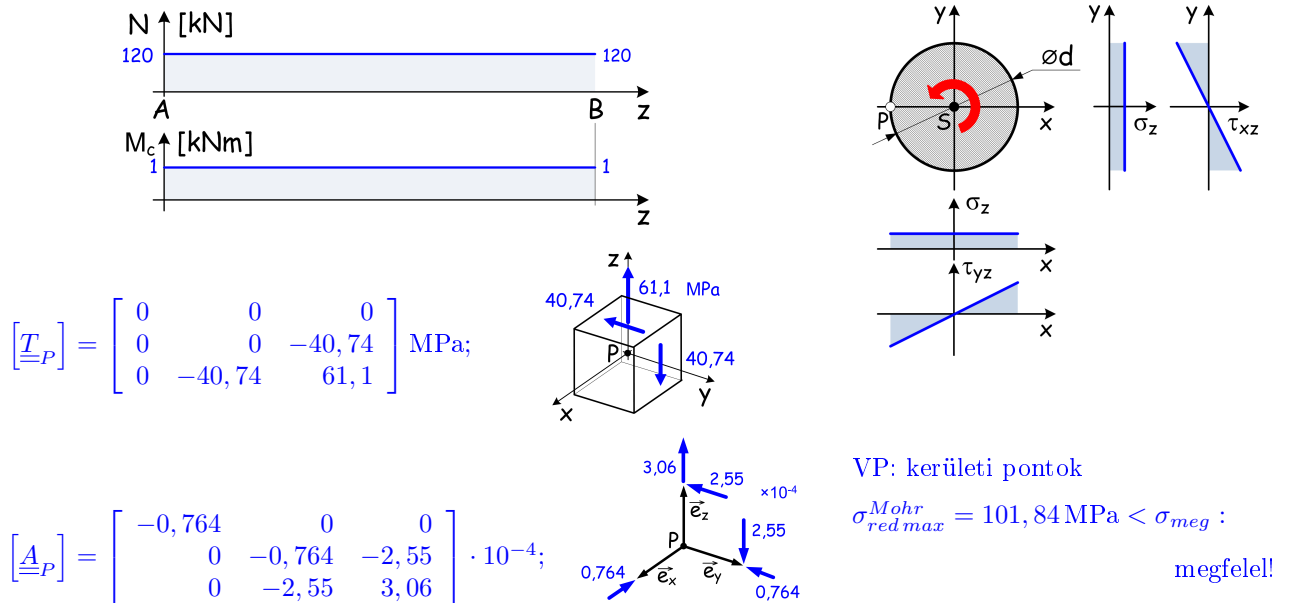


54 A körkeresztmetszetű ($d = 50 \text{ mm}$, $l = 500 \text{ mm}$) prizmatikus rúdszakasz terhelése az ábrán látható $F = 120 \text{ kN}$ erő és $M = 1000 \text{ Nm}$ nyomaték.

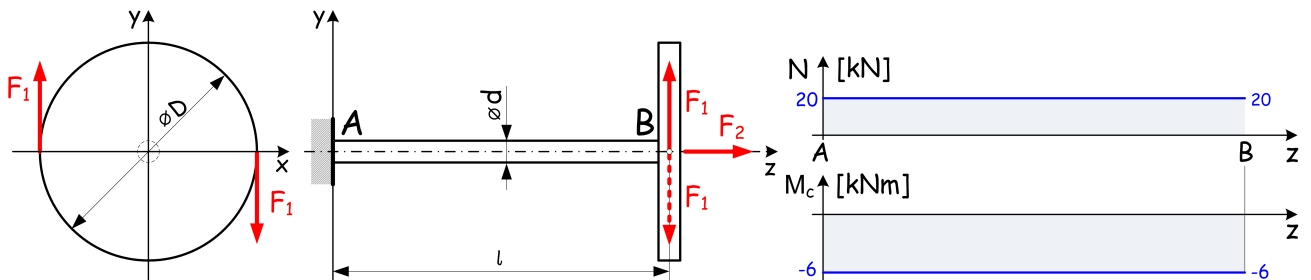


- Állapítsa meg az igénybevételt, rajzolja meg a vonatkozó igénybevételi ábrát és a $z = 0$ keresztmetszetben az x és y koordinátatengelyek mentén ébredő feszültségeloszlást jelleghelyesen!
- Határozza meg a P pontbeli \underline{T}_P feszültségi tenzor mátrixát és szemléltesse azt egy P pont környezetéből kivett elemi kockán!
- Határozza meg a P pontbeli \underline{A}_P alakváltozási tenzor mátrixát ($G = 80 \text{ GPa}$, $\nu = 0,25$) és szemléltesse azt a P ponthoz kötött elemi triéderen!
- Ellenőrizze a rudat Mohr-elmélet szerint feszültségcsúcsra, ha anyagára $\sigma_{meg} = 120 \text{ MPa}$!

Megoldás: húzás + csavarás;



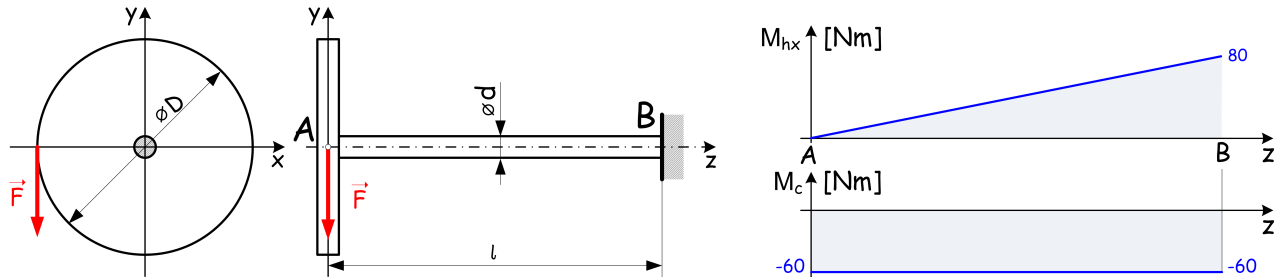
55 A $d = 80 \text{ mm}$ átmérőjű és $l = 1,6 \text{ m}$ hosszúságú tengelyt a hozzá mereven kapcsolódó $D = 1200 \text{ mm}$ átmérőjű tárcsa kerületén működő $F_1 = 5 \text{ kN}$ nagyságú erőkből álló erőpár és egy $F_2 = 20 \text{ kN}$ nagyságú tengelyirányú erő az ábrán látható módon terheli.



- Állapítsa meg a tengely igénybevételét, adja meg a vonatkozó igénybevételi ábrákat!
- Ellenőrizze a tengelyt Mohr elmélet szerint feszültségcsúcsra, ha a tengely anyagára $\sigma_{jell} = 180 \text{ MPa}$ és $n = 1,5!$
- AB tengelyt csőtengelyre cserélve és megtartva a külső átmérőnek d méretet, mekkora lehet a cső belső d_1 átmérője, hogy a HMH-féle elmélet alapján megfeleljen?

Megoldás: húzás + csavarás; $\sigma_{red\ max}^{Mohr} = 119,43 \text{ MPa} < \sigma_{meg} = 120 \text{ MPa}$: megfelel! $d_1 \leq 48 \text{ mm}$

- 56** A d átmérőjű és $l = 100 \text{ mm}$ hosszúságúnak tekintett tengelyhez mereven kapcsolódó $D = 150 \text{ mm}$ átmérőjű tárcsa kerületén $|\vec{F}| = 800 \text{ N}$ nagyságú erő működik az ábrán látható módon.



- Állapítsa meg a tengely igénybevételét, adja meg a vonatkozó igénybevételi ábrákat!
- Méretezze a tengelyt HMH szerint, ha anyagára megengedett feszültség $\sigma_{meg} = 125 \text{ MPa}!$

Megoldás: hajlítás + csavarás; $M_{red\ max}^{HMH} = 95,39 \text{ Nm}$; $d \geq 19,81 \text{ mm}$

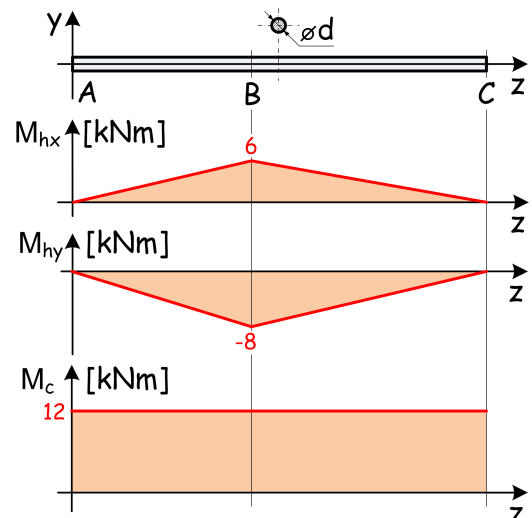
- 57** Ismert nyomatéki ábrák alapján méretezze Mohr elmélet szerint feszültségcsúcsra a tengelyt.

- Adott a d átmérőjű tengely anyagára $\sigma_{jell} = 300 \text{ MPa}$ és $n = 2,5!$
- Legyen a csőtengely külső D átmérője $7/5$ -szerese a belső d átmérőnek és $\sigma_{jell} = 300 \text{ MPa}$ és $n = 2,5!$

Megoldás: hajlítás + csavarás; VKM: B

$$M_{red\ max}^{Mohr} = 15,62 \text{ kNm}; d \geq 109,86 \text{ mm}$$

$$D = \frac{7}{5}d \geq 121,48 \text{ mm}$$



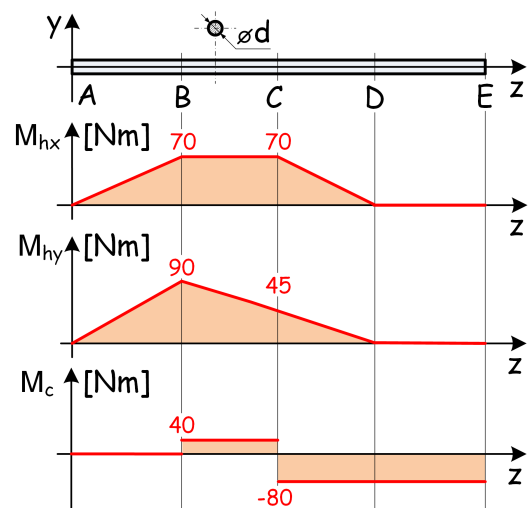
- 58** Ismert nyomatéki ábrák alapján méretezze HMH elmélet szerint feszültségcsúcsra a tengelyt.

- Adott a d átmérőjű tengely anyagára $\sigma_{jell} = 270 \text{ MPa}$ és $n = 1,5!$
- Legyen a csőtengely külső D átmérője $4/3$ -szorosa a belső d átmérőnek és $\sigma_{jell} = 270 \text{ MPa}$ és $n = 1,5!$

Megoldás: hajlítás + csavarás; VKM: B⁺

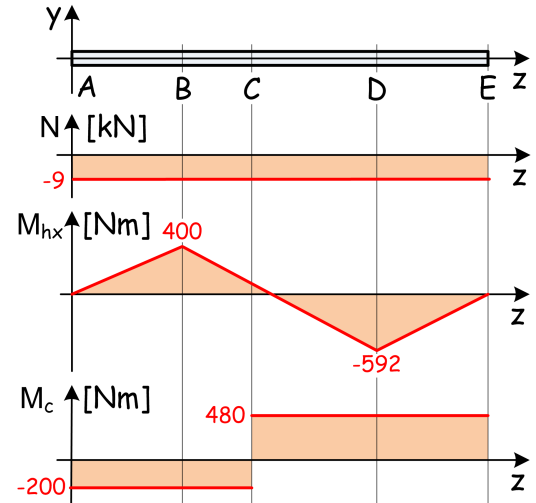
$$M_{red\ max}^{HMH} = 119,164 \text{ Nm}; d \geq 18,89 \text{ mm}$$

$$D = \frac{4}{3}d \geq 21,45 \text{ mm}$$

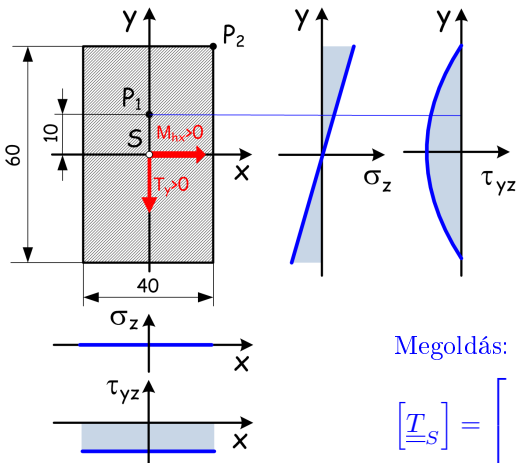


59 Ismert igénybevételi ábrák alapján ellenőrizze Mohr elmélet szerint feszültségcsúcsra a tengelyt ($A = 15 \text{ cm}^2$, $K_x = 8 \text{ cm}^3$), ha anyagára megengedett feszültség $\sigma_{meg} = 100 \text{ MPa}$ adott.

Megoldás: nyomás + hajlítás + csavarás; VKM: D
 $\sigma_{red}^{Mohr} = 100 \text{ MPa}$; Megfelel!



60 Egy téglalap keresztmetszetű ($a = 40 \text{ mm}$, $b = 60 \text{ mm}$) prizmatikus rúd veszélyes K keresztmetszetének igénybevétele az S súlypontba redukált $\vec{F} = (-24\vec{e}_y)$ kN, $\vec{M}_S = (0, 72\vec{e}_x)$ kNm eredő vektorkettőssel adott.



a. Rajzolja meg jelleghelyesen az x és y tengelyek menti feszültegeloszlásokat!

b. Határozza meg az S , P_1 és P_2 pontokban a \underline{T}_S , \underline{T}_{P_1} és \underline{T}_{P_2} feszültségi tenzorok mátrixait!

c. Keresse meg a keresztmetszet veszélyes pontját, azaz számítsa ki és vesse össze a Mohr elmélet alapján számított σ_{red}^{Mohr} feszültségértékeket az S , P_1 és P_2 pontokban!

Megoldás: Nyírás + hajlítás

$$\underline{T}_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \\ 0 & -15 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}; \quad \underline{T}_{P_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13,3 \\ 0 & -13,3 & 10 \end{bmatrix} \text{ MPa};$$

$$\underline{T}_{P_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} \text{ MPa};$$

$$\sigma_{red}^{Mohr}(S) = 30 \text{ MPa}; \quad \sigma_{red}^{Mohr}(P_1) = 28,48 \text{ MPa}; \quad \sigma_{red}^{Mohr}(P_2) = 30 \text{ MPa};$$

$$\sigma_{red}^{Mohr} = \sigma_{red}^{Mohr}(S) = \sigma_{red}^{Mohr}(P_2)$$

61 A téglalap keresztmetszetű ($a = 20 \text{ mm}$, $b = 60 \text{ mm}$), befalazott, zömök rudat egy $F = 30 \text{ kN}$ nagyságú erő az ábrán látható módon terheli.

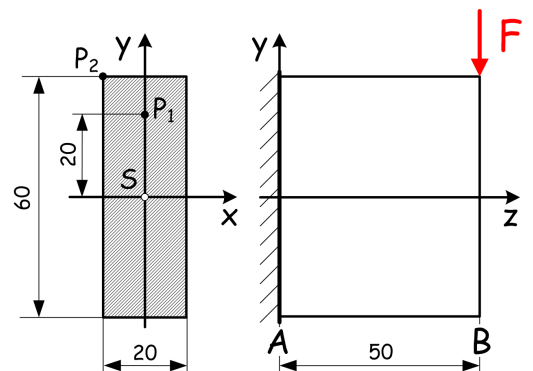
a. Határozza meg a veszélyes keresztmetszet S , P_1 és P_2 pontjaiban ébredő feszültegeket!

b. Ellenőrizze Mohr elmélet szerint feszültségcsúcsra a rudat, ha anyagára $\sigma_{jell} = 180 \text{ MPa}$ és $n = 1,5$ előírás tett!

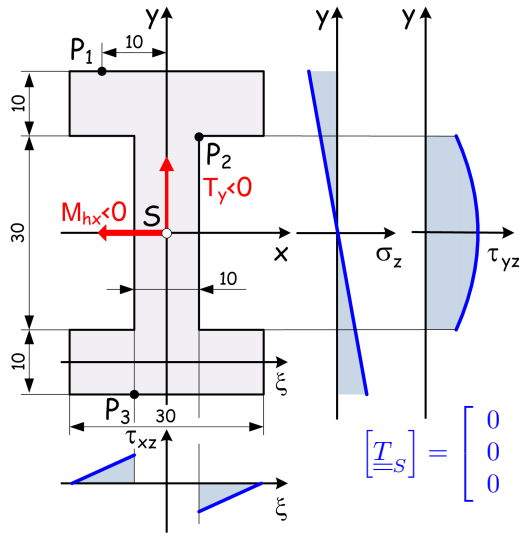
Megoldás: Nyírás + hajlítás, VKM: A

$$\sigma_z(S) = 0; \quad \tau_{yz}(S) = -37,5 \text{ MPa}; \quad \sigma_z(P_1) = 83,3 \text{ MPa}; \\ \tau_{yz}(P_1) = -20,83 \text{ MPa}; \quad \sigma_z(P_2) = 125 \text{ MPa}; \quad \tau_{yz}(P_2) = 0; \\ \sigma_{red}^{Mohr} = \sigma_z(P_2) = 125 \text{ MPa} > \sigma_{meg} = 120 \text{ MPa}$$

Nem felel meg!



- 62** Az adott keresztmetszettel bíró prizmatikus rúd veszélyes K keresztmetszetének igénybevétele az S súlypontba redukált $\vec{F} = (25\vec{e}_y)$ kN, $\vec{M}_S = (-1\vec{e}_x)$ kNm eredő vektorkettőssel adott.



a. Rajzolja meg jelleghelyesen a tengelyek menti feszültségeloszlásokat!

b. Határozza meg az S , P_1 , P_2 és P_3 pontokban a \underline{T}_S , \underline{T}_{P_1} , \underline{T}_{P_2} és \underline{T}_{P_3} feszültségi tenzorok mátrixait!

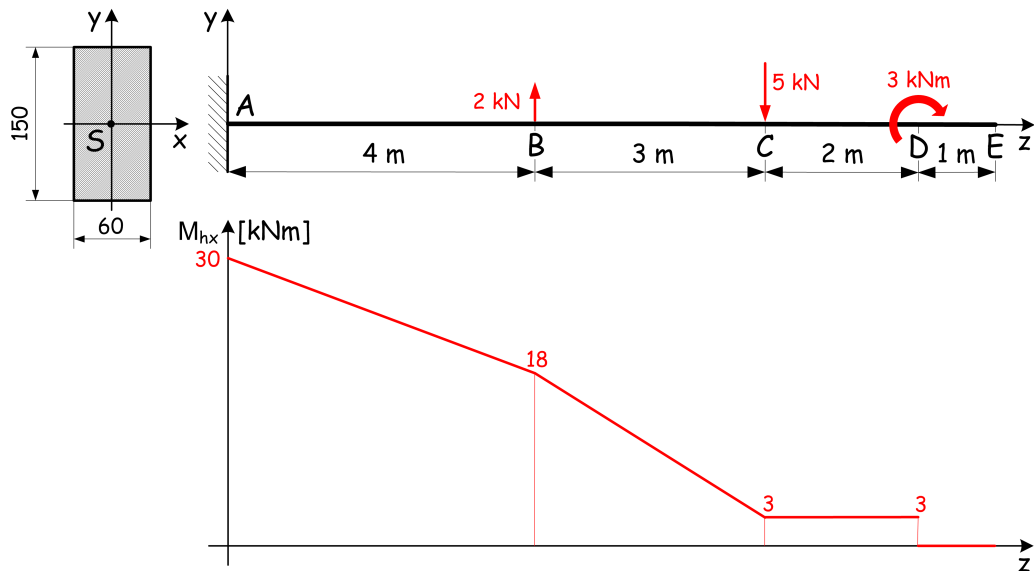
c. Keresse meg a keresztmetszet veszélyes pontját, azaz számítsa ki és vesse össze a HMH elmélet alapján számított σ_{red}^{HMH} feszültségértékeket az S , P_1 , P_2 és P_3 pontokban!

Megoldás: Nyírás + hajlítás; $I_x = 2,675 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$

$$[\underline{T}_S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 66,59 \\ 0 & 66,59 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}; [\underline{T}_{P_1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -9,345 \\ 0 & 0 & 0 \\ -9,345 & 0 & -93,46 \end{bmatrix} \text{ MPa};$$

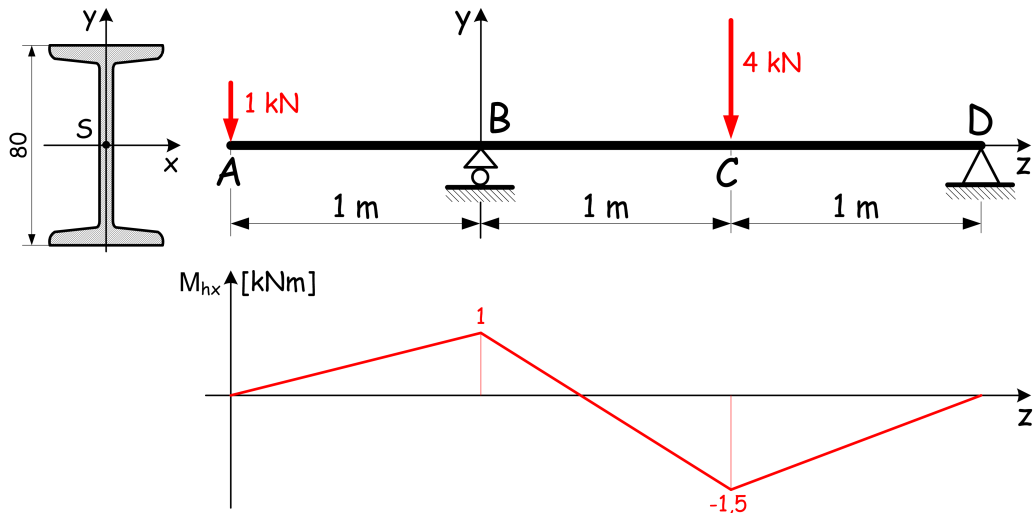
$$[\underline{T}_{P_2}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 56,07 \\ 0 & 56,07 & -56,07 \end{bmatrix} \text{ MPa}; [\underline{T}_{P_3}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 18,69 \\ 0 & 0 & 0 \\ 18,69 & 0 & 93,46 \end{bmatrix} \text{ MPa}; \sigma_{red}^{HMH} = \sigma_{red}^{HMH}(S) = 115,34 \text{ MPa}$$

- 63** Határozza meg a téglalap keresztmetszettel bíró prizmatikus rúd rugalmas középvonalának adott terhelés melletti v_C függőleges elmozdulását a C pontban és a ϕ_D szögelfordulását D pontban csak a hajlítást figyelembe vevő kiegészítő virtuális munkaelvől levezetett virtuális terhelések módszeréből ($E = 210 \text{ GPa}$)!



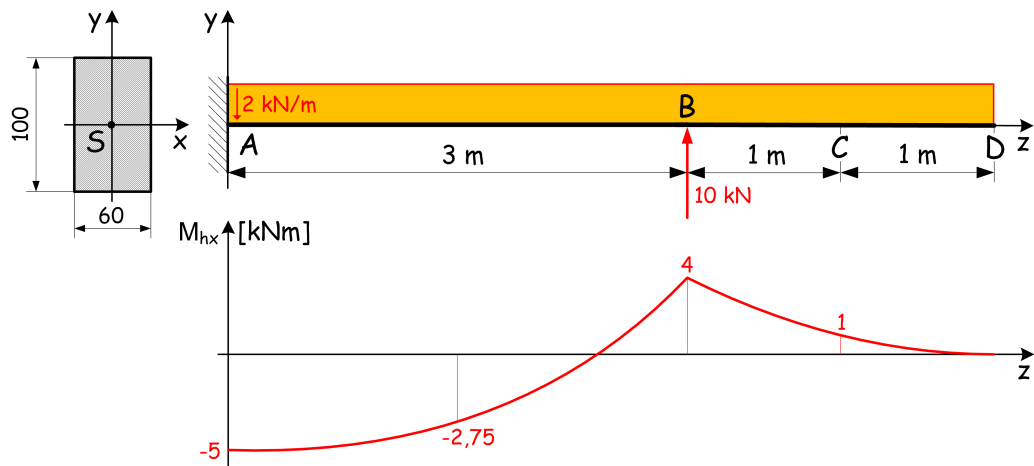
Megoldás: $v_C = -156,46 \text{ mm}$; $\phi_D = 37,67 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$

- 64** A szabványos I80 szelvényű ($I_x = 77,8 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$) prizmatikus rúd rugalmas középvonalának A pontjában határozza meg adott terhelés mellett bekövetkező v_A függőleges elmozdulást és C pontban a ϕ_C szögelfordulást csak a hajlítást figyelembe vevő virtuális terhelések módszere alapján ($E = 210 \text{ GPa}$)!



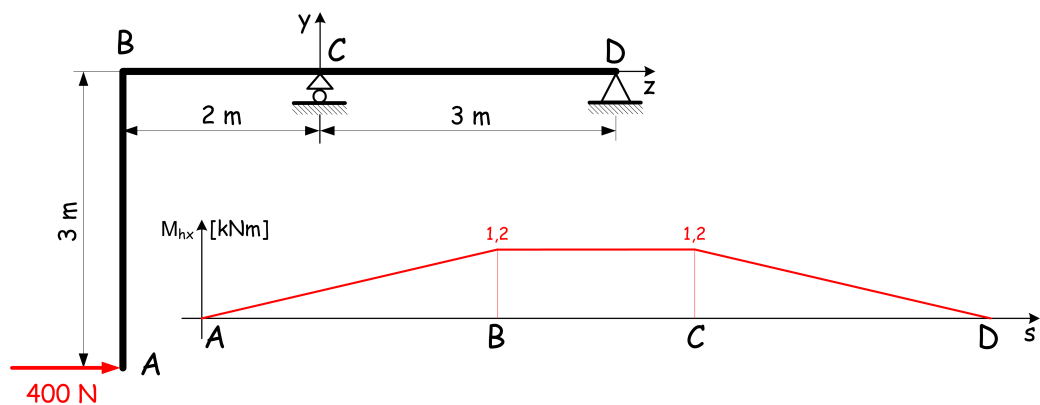
Megoldás: $v_A = 0$; $\phi_C = 0,51 \cdot 10^{-3}$ rad

- 65** A téglalap keresztmetszettel bíró tartó rugalmas középvonalának D pontjában határozza meg adott terhelés mellett a v_D függőleges elmozdulást és ϕ_D szögelfordulást csak a hajlítást figyelembe vevő virtuális terhelések módszere alapján ($E = 200\text{ GPa}$)!



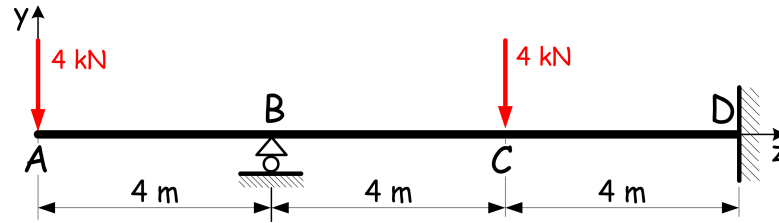
Megoldás: $v_D = 23,75\text{ mm}$; $\phi_D = -3,3 \cdot 10^{-3}$ rad

- 66** Az állandó keresztmetszettel ($I_x E = 350\text{ kNm}^2$) bíró törtvonalú tartó rugalmas középvonalának A pontjában adott terhelés mellett határozza meg a v_A függőleges és w_A vízszintes elmozdulást csak a hajlítást figyelembe vevő virtuális terhelések módszeréből!



Megoldás: $v_A = -13,71\text{ mm}$; $w_A = 41,14\text{ mm}$

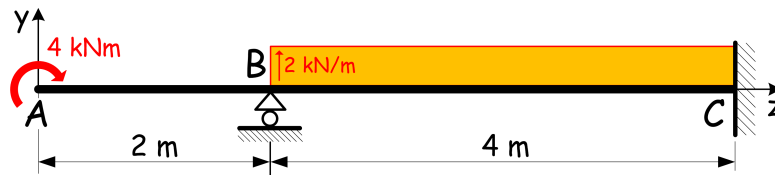
67 Az állandó keresztmetszettel ($I_x E = 350 \text{ kNm}^2$) bíró statikailag határozatlan tartó terhelése adott.



- Készítsen törzstartót a B pontbeli támasz elhagyásával és a szükséges kinematikai feltétel hozzárendelésével!
- Határozza meg F_{By} támasztóerő koordinátát a virtuális terhelés módszerével, majd ennek ismeretében a támasztó-erőrendszert!
- Határozza meg C pontbeli v_C függőleges elmozdulást csak a hajlítást figyelembe vevő kiegészítő virtuális munkaelv alapján!

Megoldás: $v_B = 0 \Rightarrow F_{By} = 8,25 \text{ kN} \uparrow$; $F_{Dy} = -0,25 \text{ kN} \downarrow$; $M_\delta = 2 \text{ kNm} \curvearrowright$; $v_C = 38 \text{ mm}$

68 Az állandó keresztmetszettel ($I_x E = 350 \text{ kNm}^2$) bíró statikailag határozatlan tartó terhelése adott.



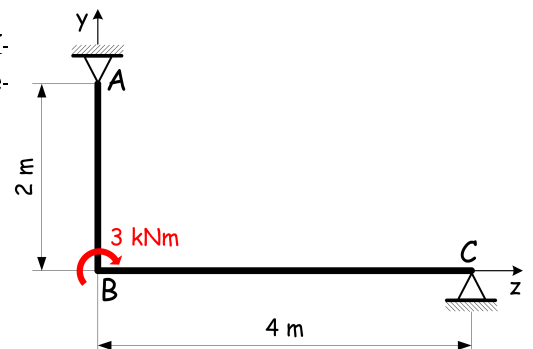
- Készítsen törzstartót a B pontbeli támasz elhagyásával és a szükséges kinematikai feltétel hozzárendelésével!
- Határozza meg F_{By} támasztóerő koordinátát a virtuális terhelés módszerével, majd ennek ismeretében a támasztó-erőrendszert!

Megoldás: $v_B = 0 \Rightarrow F_{By} = -4,5 \text{ kN} \downarrow$; $F_{Cy} = -3,5 \text{ kN} \downarrow$; $M_\gamma = -2 \text{ kNm} \curvearrowleft$

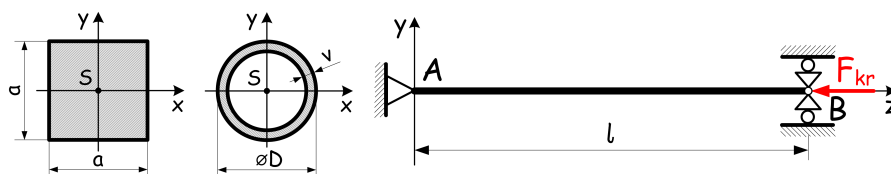
69 Az állandó keresztmetszettel ($I_x E = 300 \text{ kNm}^2$) bíró statikailag határozatlan törtvonalú tartó terhelése adott.

- Készítsen törzstartót, úgy hogy a C pontbeli F_{Cz} támasztóerő koordinátája meghatározása céljából!

Megoldás: $F_{Cz} = 1 \text{ kN} \rightarrow$



70 Az $l = 2 \text{ m}$ hosszúságú, állandó keresztmetszettel bíró, ábrán látható megtámasztásokkal szerelt rudat kihajlásra ellenőrizzük.

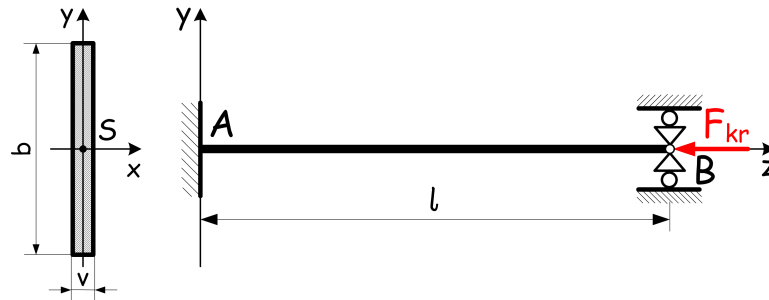


- a. Határozza meg a λ_E határkarcsúsági tényezőt és vázolja a $\sigma_{kr}(\lambda)$ diagramot, ha $E = 200 \text{ GPa}$, $\sigma_E = 200 \text{ MPa}$ és $\sigma_F = 300 \text{ MPa}$!
- b. Számítsa ki a λ_{\square} karcsúsági tényezőt $a = 40 \text{ mm}$ oldalméretű négyzet keresztmetszetre és a λ_{\odot} karcsúsági tényezőt $D = 63 \text{ mm}$ külső átmérőjű és $v = 3 \text{ mm}$ falvastagságú csőkeresztmetszetre!
- c. Mindkét keresztmetszetre határozza meg σ_{kr} kritikus feszültséget, illetve F_{kr} kritikus erőt, amely már kihajlást okoz!

Megoldás: $\lambda_E = 99,35$; $\lambda_{\square} = 173,16$; $\lambda_{\odot} = 94,16$; $\sigma_{kr\square} = 65,83 \text{ MPa}$; $\sigma_{kr\odot} = 205,22 \text{ MPa}$;

$F_{kr\square} = 105,33 \text{ kN}$; $F_{kr\odot} = 116,05 \text{ kN}$

- 71** A $v = 1,5 \text{ mm}$ vastagságú, $b = 30 \text{ mm}$ szélességű és $l = 300 \text{ mm}$ hosszúságú téglalap keresztmetszetű prizmatikus rúdnak feltételezett fűrészlap nyomott szakaszát egyik végén befogott, másik végén csuklós megfogásúnak tekintjük. A rúd anyagát jellemző $E = 200 \text{ GPa}$ értékű, folyáshatára $\sigma_F = 350 \text{ MPa}$, arányossági határa pedig $\sigma_E = 200 \text{ MPa}$.



- a. Mekkora F_{kr} erőnél következik be a fűrészlap kihajlása?

Megoldás: $F_{kr} = 377,6 \text{ N}$

- 72** Az $l = 2 \text{ m}$ hosszúságún 2 darab U50 ($A = 7,1 \text{ cm}^2$, $I_{\xi} = 26 \text{ cm}^4$, $I_{\eta} = 9,1 \text{ cm}^4$, $e = 1,37 \text{ mm}$) szelvényből álló rúd felső vége szabad rúdvég, alsó vége pedig befogott. A rúd anyagát jellemző $E = 200 \text{ GPa}$ értékű, folyáshatára $\sigma_F = 300 \text{ MPa}$, arányossági határa pedig $\sigma_E = 200 \text{ MPa}$.

- a. Határozza meg a λ_E határkarcsúsági tényezőt!
- b. Mekkora c távolság mellett következik be a kihajlás mindkét fősíkban azonos kritikus erő mellett és mekkora ez az F_{kr} erő?

Megoldás: $\lambda_E = 99,35$; $c = 3,45 \text{ mm}$; $\lambda = 209,03$; $F_{kr} = 64,15 \text{ kN}$

