

MINTAFELADATOK

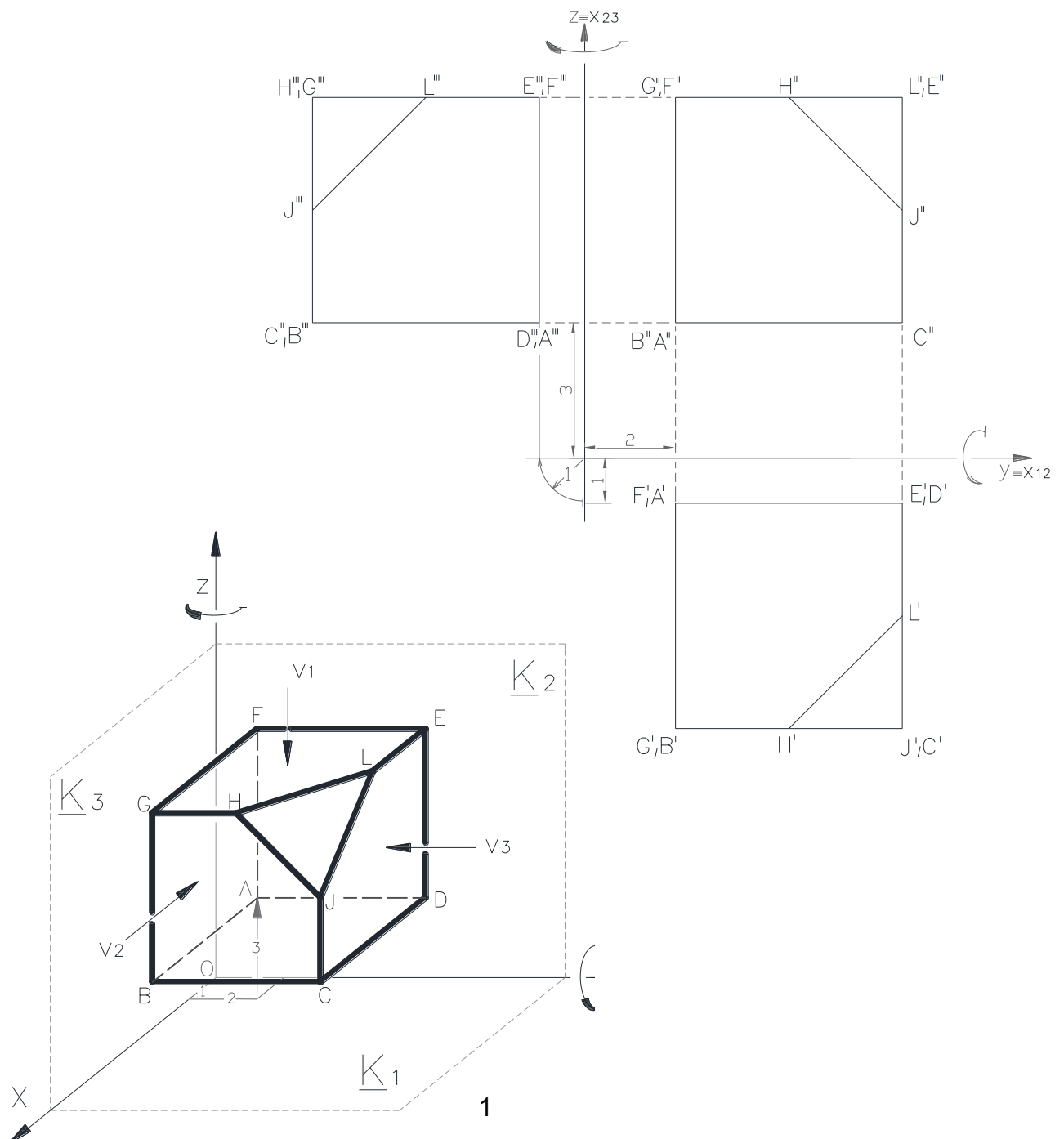
1. Csonkolt kocka rendezett nézetei

Adott a 4cm oldalélű kocka képsíkokkal párhuzamos lapjainak a $\underline{K}_1$ képsíkhöz viszonyított magassága (3cm), a $\underline{K}_2$ képsíktól mért távolsága (1cm) és a $\underline{K}_3$ képsíktól mért eltérése (2cm).

Megoldás:

A kocka három nézetének elhelyezése az O origóhoz legközelebbi A csúcspontjának segítségével történik az $A(x, y, z)$ koordinátái segítségével oly módon, hogy a z koordináta a $\underline{K}_1$ képsíkhöz viszonyított magassága, az x koordináta a $\underline{K}_2$ képsíktól mért távolsága és az y koordináta a $\underline{K}_3$ képsíktól mért eltérése.

- A csonkolt alakzat megtervezése a kocka axonometrikus képén történik.
- A csúcspontok vetületei a vetítősugarak számozásának megfelelően kerülnek jelölésre.



2. Hasáb ábrázolása

Adott az $\mathbf{m}$ egyenes, a rá nem illeszkedő $\mathbf{A}$ pont. Képsíktranszformációval szerkessze meg annak a négyzetalapú egyenes gúlának a vetületeit, amelynek magasságvonala az $\mathbf{m}$ egyenes, és az alapnégyzetének az egyik csúcspontja $\mathbf{A}$. Ábrázolja a hasábtestet láthatóság szerint!

Megoldás: az $\mathbf{m}$ magasságegyenes vetítősugárrá transzformálásával.

- Az általános helyzetű $\mathbf{m}$ egyenes a $\mathbf{K}_4$ képsíkkal párhuzamos egyenessé az $\mathbf{x}_{14} \parallel \mathbf{m}^I$ megválasztásával transzformálható.
- Az $\mathbf{m}$ egyenes ötödik vetítősugárrá transzformálása az $\mathbf{x}_{45} \perp \mathbf{m}^{IV}$ megválasztásával, a $\mathbf{K}_4$ negyedik képsíkhöz kapcsolt $\mathbf{K}_5$ ötödik képsík bevezetésével végezhető el.

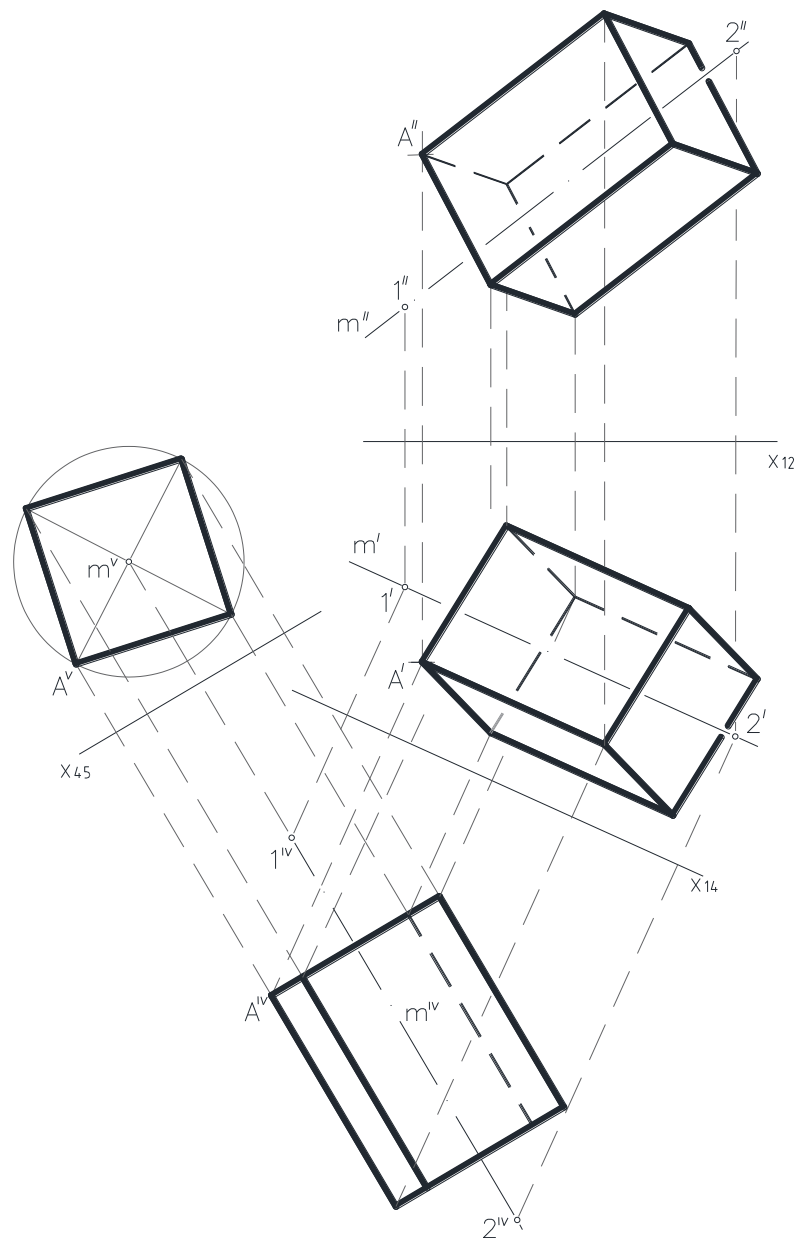
A $\{\mathbf{K}_4, \mathbf{K}_5\}$ képsíkrendszerben szerkesztendő meg a hasáb ötödik és negyedik képe:

- A $\mathbf{K}_5$ képsíkkal párhuzamos alapsíkban az alapnégyzet megszerkeszthető az $\mathbf{m}^V (\equiv \mathbf{K}^V)$ -re illeszkedő középpontja és az $\mathbf{A}^V$ csúcspontja ismeretében.
- Az alapnégyzet síkja merőleges a $\mathbf{K}_4 \parallel \mathbf{m}$ magasságegyenesre, ezért $\mathbf{V}_4$ negyedik vetítősík állású. Az alapsík élben látszódó negyedik képe illeszkedik az $\mathbf{A}^{IV}$ negyedik képre és $\mathbf{V}_4^{IV} \perp \mathbf{m}^{IV}$. Az alapnégyzet további csúcspontjait ötödik képről az élben látszódó $\mathbf{V}_4^{IV}$ -re rendezendő.
- Az oldalélek az alapnégyzet csúcspontjainak negyedik képéből az $\mathbf{m}$ magasságegyenessel párhuzamosan megrajzolhatók, és mivel a $\mathbf{K}_4$ képsíkkal párhuzamosak, a magasság valódi nagysága - az alapél másfélszerese - felmérhető rájuk.

A $\{\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2\}$ képsíkrendszerben szerkesztendő meg a hasáb első és második képe:

- A hasáb az ötödik kép elhagyásával transzformálható a $\{\mathbf{K}_4, \mathbf{K}_1\}$ képsíkrendszer első képsíkjára.
- A hasáb negyedik képének elhagyásával transzformálható a $\{\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2\}$ képsíkrendszer második képsíkjára.

A hasáb kitérő éleinek láthatósága egy-egy fedőpontpár ellenkező rendezőinek összevetéséből állapítandók meg.



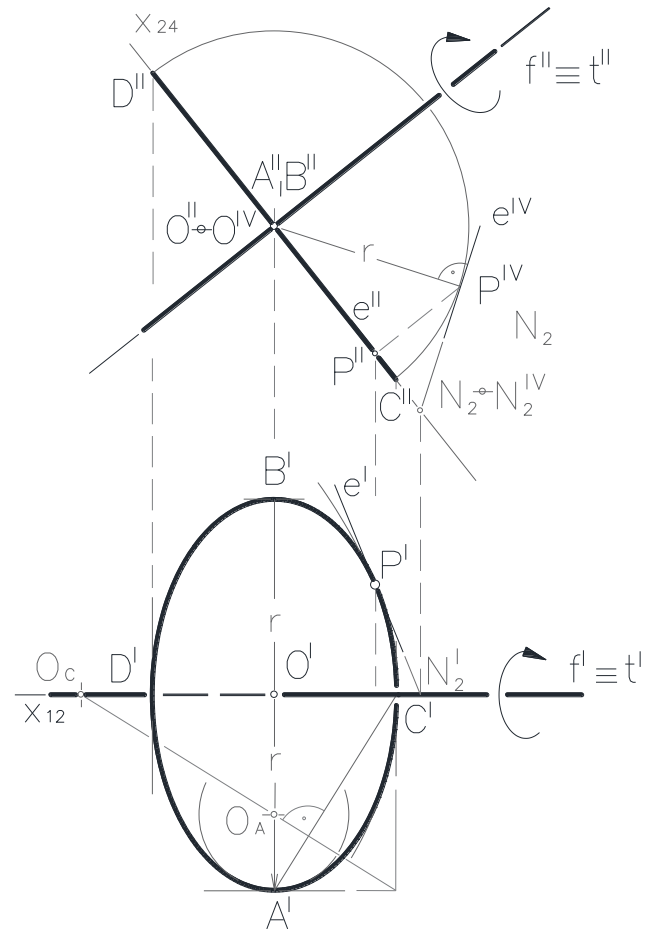
3. Körtárcsa ábrázolása

Adott: t frontális helyzetű egyenes és egy rá nem illeszkedő P pont.

Ábrázolja azt a t frontális tengelyű körtárcsát, melynek a P pont egy kerületi pontja! Szerkessze meg a kör első képellipszisének AB nagy- és CD kistengelyét, a tengelyvégpontokban az érintőket és a hiperoszkuláló köröket, valamint a P pontjában az e érintőjét! Rajzolja meg az első képellipszist, majd ábrázolja a körtárcsa és a tengelye láthatóságát!

Megoldás:

- A körtárcsa síkja merőleges a K_2 -vel párhuzamos t tengelyére, ezért a síkja az a V_2 második vetítősík, mely illeszkedik a P pontjának a P'' második képére és merőleges a t'' -re, mivel a derékszög egyik szára, a $t \parallel K_2$.
- A körtárcsa O középpontja a V_2 síkjának és a t tengelyének a közös pontja, ezért a második képen kijelölhető, azaz $P'' \equiv V_2'' \cap t''$, majd a tengely első képére rendezhető.
- Jelöljük ki a tengely első képét a képsíkrendszerünk tengelyének, azaz az $x_{1,2} \equiv t'$, valamint a körtárcsát tartalmazó új, negyedik képsíknak a $K_4 \equiv V_2$ második képsíkra merőleges második vetítősíkot, azaz az $x_{2,4} \equiv V_2''$.
- A K_4 negyedik képsíkra transzformálva a körtárcsa O középpontját a P kerületi pontjával a kör negyedik képe megrajzolható az O'' körül az $r = |O''P''|$ sugárral.
- A kör második képe az $|O''C''| = |O''D''| = r$ alapján egy O középpontú, és $d = 2 \cdot r$ átmérőjű szakasz.
- A V_2 második vetítősíkban lévő kör első képellipszisének A' és B' nagytengelyvégpontjai a K' középponton átmenő, függőleges helyzetű horizontálisra illeszkednek, és a $|K'A'| = |K'B'| = r$ ismeretével jelölhetők ki.
- A kör első képellipszisének a kistengelye a kör legnagyobb mértékben rövidülő átmérőjének az első képe, ami a síkjának az O pontra illeszkedő első esésvonalán fekszik, vagyis merőleges a függőleges helyzetű horizontálisra. A C' és D' kistengely végpontokat az e_1' első esésvonalra rendezett C és D átmérő-végpontok képeként szerkeszthetjük meg.
- A körvonal P pontjában az e érintő meghatározása a negyedik képen a P'' -ben az r sugárra állított merőlegesként határozható meg.
- Az e érintő $N_2 \equiv x_{2,4} \cap e''$ nyompontjának az N_2' első képe egy $x_{1,2}$ -re merőleges rendezővel illeszthető az $x_{1,2}$ tengelyre.
- Az első képellipszis A és C tengelyvégpontjai által képezhető „negyed érintő” téglalap AC átlójára a külső csúcspontból állított merőleges egyenessel jelöljük ki az A és C tengelyvégpontokhoz tartozó hiperoszkuláló körök O_A és O_C középpontjait a nagy és kistengely egyenesén.
- Az első képen a láthatóság egy fedőpontpár második képének a K_1 képsíkhöz viszonyított magasságának összevetésével állapítandó meg.



4. Kúp síkmetszése parabolaiban

Feladat: Készítse el egy K_1 képsíkon álló forgáskúp és egy V_2 második vetítősík parabola metszetét!

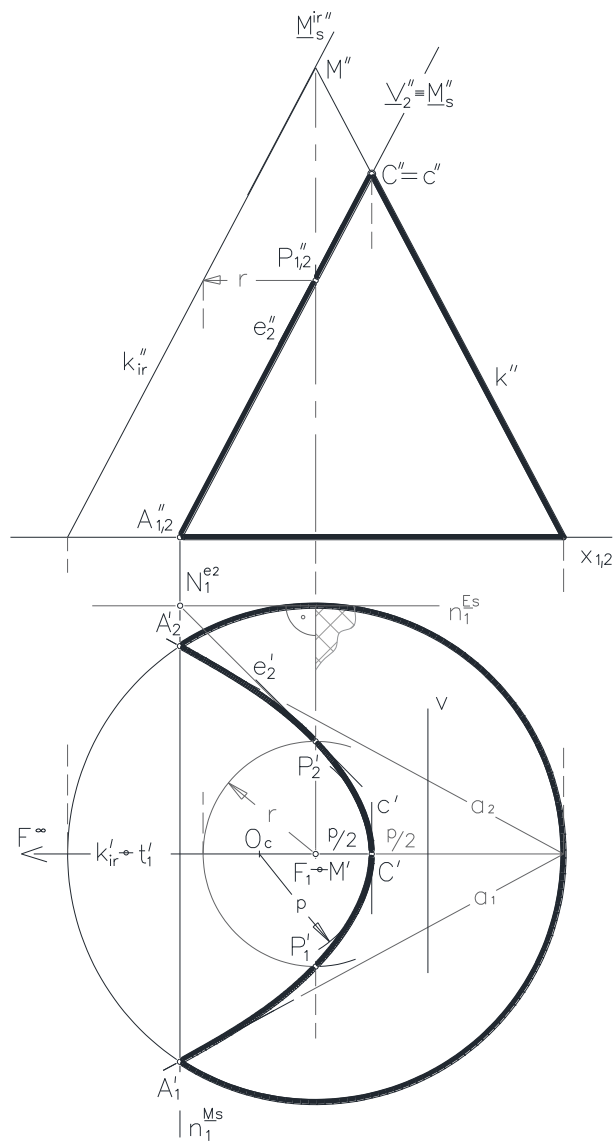
Megoldás: A kúp k_{ir} második kontúralkotójára illeszkedik az M_s^{ir} irányítók, amellyel párhuzamosan jelölendő ki tetszőleges távolságra tőle a metszősík, azaz $k_{ir}'' \parallel V_2''$ lesz.

A kúpnak és a második vetítősík helyzetű M_s metsző síknak egy közös szimmetriasíkja a kúp tengelyére illeszkedő F frontális sík, ezért a síkmetszet parabolának is szimmetriasíkja.

A merőleges vetítés tulajdonságai miatt az F közös szimmetriasík F' első képe szimmetria tengelye a síkmetszet első képének, az első képparabolának.

Az első képparabolának

- a t_1 tengelye a V_2 helyzetű metsző síkkal párhuzamos k_{ir} második kontúralkotó k_{ir}' első képével fedésben lévő K_1 képsíkra illeszkedő egyenes.
- az F_1 fókusza a speciális elhelyezkedés miatt (analitikus úton igazoltan) azonos a kúp csúcspontjának M' első képével.
- a C' csúcspontja nem más, mint első képe a V_2 és azt a végesben döfő második kontúralkotó közös C pontjának.
- a C' csúcspontjában a c' érintője első képe a síkmetszet parabola C pontbeli c érintőjének, ami a második vetítősík helyzetű metsző síknak és a C csúcspontban szintén második vetítősík helyzetű érintősíknak a metszésvonala, ezért második vetítősugár, így a c' függőleges helyzetű.
- a v vezéregyenes a t_1 tengelyre merőleges, és mivel a parabola definíciójából következően a C' csúcspont felezi az F_1 fókusz és a v vezéregyenes távolságát, az F_1 -nek a C' -re vonatkozó tükröképén megy keresztül.
- a profilalkotókra illeszkedő pontjai a második képükre illeszkedő H horizontális síkkal való szeleteléssel szerkesztendő.
- a P_2 pontjában az e_2 érintője a metszősíkknak és a kúp p_2 profilalkotóhoz tartozó érintősíknak a metszésvonalaként szerkesztendő oly módon, hogy az e_2 érintő P_2 pontjához meghatározható érintősík n_1^{Es} első nyomvonal és a metszősík n_1^{Ms} első nyomvonal a K_1 képsík N^{e2}_1 első nyompontjában metszik egymást, így az e_2' érintő illeszkedik a P_2' és az N^{e2}_1 pontokra.
- a C' csúcspontjában az O_c középpontú hiperoszkuláló körének a p sugara azonos parabola p paraméterével, azaz az F_1 fókusz és a v vezéregyenes távolságával.



5. Forgáskúp és forgáshenger áthatása

Feladat: Készítse el egy K_1 képsíkon álló forgáskúp és egy K_2 második képsíkon álló forgáshenger egy önmetszéspontra tartalmazó áthatását!

Megoldás:

- A kúp második kontúralkotójának és a henger második kontúrkörének közös érintkező pontja az áthatási görbe O jelű önmetszéspontra.
- A kúp K_1 képsíkon elhelyezett alapsíkja felett d magasságra lévő H horizontális helyzetű szeletelő sík a kútból egy ρ sugarú kört, a hengerből a h_1 és a h_2 alkotókat metszi ki, melyek első képen kijelölhetők.
- Az áthatási görbe egy-egy pontjában, azaz a kúpfelületre és a hengerfelületre egyaránt illeszkedő pontban az érintő a kúpfelület E_s^k és a hengerfelület E_s^h érintősíkjának a metszéspontjaként határozandó meg, azaz $e = E_s^k \cap E_s^h$. A P áthatási pontban a kúp E_s^k érintősíkja a P pontot tartalmazó kúpalkotó és annak az alapkörpontjában az alapkör n_1^k érintője által határozható meg, míg a henger E_s^h érintősíkja a második vetítőhenger második képét a P'' pontban érintő második vetítősík. Tehát az e érintő második képe illeszkedik az $E_s^{h''} \equiv n_2^{h''}$ -ra. A P pontban a henger második vetítősík helyzetű érintősíkjának az n_1^h első nyomvonala merőleges az x_{12} -re. Az érintő első nyompontja az érintősíkok első nyomvonalaiban a K_1 képsíkon lévő metszéspontra, azaz $N_1^e \equiv n_1^k \cap n_1^h$. Az érintő e' első képe illeszkedik az N_1^e és a P' pontokra.
- Az áthatásnak a henger első kontúrára illeszkedő 1, 2 pontjaiban a henger érintősíkja a henger kontúralkotójára illeszkedő első vetítősík, így erre illeszkedően rajzolhatók meg vastag vonallal az érintők első képei.
- Az áthatásnak a kúp kontúralkotójára illeszkedő 3, 4 pontjában a henger és a kúp érintősíkja is második vetítősík helyzetű, ezért a metszéspontjuk második vetítősugar állású.
- Az áthatás legalsó pontjai az 5, 6 pontok illeszkednek a K_1 képsíkra helyezett kúp alapkörére és a felvételtkor szintén a K_1 képsíkra helyezett henger tengelyével fedésben lévő hengeralkotóra.

